



LEONARDO CAETANO DE SOUSA BASSAGA

**PROJETO DE CONTROLE PARA UM SISTEMA *BALL BALANCER* DE BAIXO CUSTO  
E DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA SCADA**

Três Lagoas - MS

2026

LEONARDO CAETANO DE SOUSA BASSAGA

**PROJETO DE CONTROLE PARA UM SISTEMA *BALL BALANCER* DE BAIXO CUSTO  
E DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA SCADA**

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul (IFMS) – Campus Três Lagoas, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação.

**Orientador(a):** Dr. Diogo Ramalho de Oliveira

Três Lagoas - MS

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul

---

B317p Bassaga, Leonardo Caetano de Sousa.  
Projeto de controle para um sistema *Ball Balancer* de baixo custo e desenvolvimento de um sistema *Scada* [recurso eletrônico] / Leonardo Caetano de Sousa Bassaga. – Três Lagoas - MS, 2026.  
85 p. : il.

Orientador(a): Dr. Diogo Ramalho de Oliveira  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) Engenharia de Controle e Automação -- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul (IFMS), Campus Três Lagoas, Três Lagoas, MS, 2026.

1. LMIs. 2. Elipse E3. 3. Arduino. 4. Ensino de engenharia. I. Bassaga, Leonardo Caetano de Sousa. II. Oliveira, Diogo Ramalho de. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul – Campus Três Lagoas. VI. Título.

CDD 629.8

---

Bibliotecário Responsável: Marcos Rubens Alves da Silva - CRB-1/2791



### ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Ao décimo sexto dia do mês de abril do ano de dois mil e vinte e seis foi apresentado por Leonardo Caetano de Sousa Bassaga, para a banca examinadora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul campus Três Lagoas, o Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Projeto de controle para um sistema ball balancer de baixo custo e desenvolvimento de um sistema SCADA” como exigência parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação, tendo como nota final dez (10,0) e sendo considerado APROVADO. As correções solicitadas deverão ser realizadas em até trinta dias, concluindo com a entrega do documento final à biblioteca. Nada mais havendo a tratar, deu-se por encerrado o trabalho e lavrou-se esta ata que vai assinada pelos membros da Banca.

16 de abril de 2026

#### BANCA EXAMINADORA

---

Diogo Ramalho de Oliveira  
IFMS-Campus Três Lagoas  
Orientador(a)

---

Marcus Felipe Calori Jorgetto  
IFMS-Campus Três Lagoas  
1º docente convidado

---

Ricardo de Moura Araujo  
IFMS-Campus Três Lagoas  
2º docente convidado

#### Documento assinado eletronicamente por:

- **Diogo Ramalho de Oliveira, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 16/04/2026 16:45:46.
- **Marcus Felipe Calori Jorgetto, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 16/04/2026 16:46:59.
- **Ricardo de Moura Araujo, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 16/04/2026 16:56:12.



Este documento foi emitido pelo SUAP em 16/04/2026. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse <https://suap.ifms.edu.br/autenticar-documento/> e forneça os dados abaixo:

Código Verificador:  
606335

Código de Autenticação:  
d729551fb4

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à minha família, pelo apoio incondicional, incentivo e compreensão durante toda a graduação.

Ao meu orientador, pela dedicação, paciência e orientação ao longo destes anos, contribuindo de forma fundamental para meu desenvolvimento acadêmico e para a realização deste trabalho.

Aos professores do curso de Engenharia de Controle e Automação, pelos conhecimentos transmitidos e pela contribuição na minha formação profissional.

Aos colegas e amigos que estiveram presentes durante essa trajetória, compartilhando experiências, dificuldades e aprendizados.

Por fim, agradeço à instituição e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um sistema de controle para um protótipo *ball balancer* de baixo custo, aliado à implementação de um sistema supervisório em ambiente SCADA. O projeto foi motivado pela necessidade de disponibilizar, em ambiente acadêmico, uma alternativa acessível aos sistemas comerciais de alto custo utilizados no ensino e na pesquisa em engenharia de controle e automação. O sistema físico foi construído com componentes de fácil aquisição, como servomotores, uma tela resistiva para medição da posição da esfera, uma placa Arduino Uno e peças impressas em 3D. Para o controle do sistema, foram adotadas duas abordagens complementares. A primeira utilizou técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), aplicadas ao modelo matemático do sistema para o projeto de um controlador com realimentação de estados, garantindo estabilidade segundo critérios de taxa de decaimento, raio e ângulo dos polos. A segunda abordagem consistiu na implementação de um controlador PID embarcado no Arduino, com possibilidade de ajuste em tempo real por meio de uma interface gráfica. A interface supervisória foi desenvolvida no software Elipse E3, permitindo monitoramento dos sinais do sistema, alteração de parâmetros do controlador e seleção de diferentes tipos de referência, como sinais degrau, quadrado, senoide e círculo. Foram realizadas simulações e testes práticos para avaliar o desempenho do sistema em diferentes configurações de restrições das LMIs, analisando a resposta da posição da esfera, a tensão aplicada aos atuadores e o tempo de acomodação. Os resultados mostraram que a aplicação das técnicas de LMI permitiu melhorar a estabilidade e reduzir a oscilação do sistema, ao mesmo tempo em que a integração com o supervisório proporcionou uma experiência interativa e didática. Conclui-se que o projeto atendeu aos objetivos propostos, oferecendo uma solução funcional, de baixo custo e com grande potencial para uso em atividades de ensino e pesquisa. Como trabalhos futuros, sugere-se a ampliação do controle para os seis graus de liberdade do sistema e a implementação de novas técnicas de controle avançado.

**Palavras-chave:** LMIs. Elipse E3. Arduino. Ensino de engenharia.

## ABSTRACT

This work presents the development of control system to low-cost ball balancer prototype combined with the implementation of supervisory system in SCADA. The project was motivated by the need to provide, in an academic environment, an accessible alternative to high-cost commercial systems commonly used in teaching and research in control and automation engineering. The physical system was built using easily accessible components, such as servomotors, resistive touch screen to measure the ball position, Arduino Uno board and 3D-printed parts. Two complementary approaches were adopted for the control design. The first approach employed techniques based on Linear Matrix Inequalities (LMIs), applied to the mathematical model of the system to design a state-feedback controller, ensuring stability according to decay rate, pole radius and pole angle criteria. The second approach consisted of implementing a PID controller embedded in the Arduino, allowing real-time tuning through graphical interface. The supervisory interface was developed using the Elipse E3 software, enabling system signal monitoring, controller parameter adjustment and selection of different reference signals, such as step, square, sinusoidal and circular signals. Simulations and experimental tests were conducted to evaluate system performance under different LMI constraint configurations, analyzing the ball position response, actuator voltage and settling time. The results showed that the application of LMI-based techniques improved system stability and reduced oscillations, while the integration with the supervisory system provided an interactive and educational environment. It is concluded that the proposed project achieved its objectives, offering a functional, low-cost solution with strong potential for teaching and research applications. As future work, the extension of the control strategy to the six degrees of freedom of the system and the implementation of additional advanced control techniques are suggested.

**Keywords:** LMIs. Elipse E3. Arduino. Engineering education.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1. (a) Estado de Equilíbrio Estável e uma trajetória representativa; (b) Estado de Equilíbrio Estável Assintótico e uma trajetória representativa; (c) Estado de Equilíbrio Instável e uma trajetória representativa..... | 18 |
| Figura 2. Sistema realimentado. ....                                                                                                                                                                                             | 22 |
| Figura 3. Região $S(\gamma, r, \theta)$ para alocação de autovalores.....                                                                                                                                                        | 23 |
| Figura 4. 2DOF ball balancer fabricado pela Quanser.....                                                                                                                                                                         | 24 |
| Figura 5. Diagrama de corpo livre do eixo x do sistema 2 DOF ball balancer.....                                                                                                                                                  | 25 |
| Figura 6. Diagrama de blocos do sistema 2 DOF ball balancer completo, em malha aberta. ....                                                                                                                                      | 26 |
| Figura 7. Diagrama de blocos de malha aberta 1D do 2DOF ball balancer.....                                                                                                                                                       | 26 |
| Figura 8. Controle em cascata para o controle de um eixo do 2DOF ball balancer.....                                                                                                                                              | 29 |
| Figura 9. Sistema ball balancer construído no IFMS. ....                                                                                                                                                                         | 34 |
| Figura 10. Organização de cada servo montado no ball balancer.....                                                                                                                                                               | 35 |
| Figura 11. Arquitetura de controle proposta.....                                                                                                                                                                                 | 37 |
| Figura 12. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (87) obtido através do Teorema 2. ....                                                                                                                          | 39 |
| Figura 13. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2. ....                                                                                                                          | 39 |
| Figura 14. Posição da esfera nos eixos x-y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2. ....                                                                                                                      | 40 |
| Figura 15. Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2.....                                                                                                                   | 40 |
| Figura 16. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 1$ .....                                                                                                       | 41 |
| Figura 17. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 1$ .....                                                                                                       | 42 |
| Figura 18. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 1$ .....                                                                                                     | 42 |
| Figura 19. Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 1$ .....                                                                                               | 43 |
| Figura 20. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 2$ .....                                                                                                       | 44 |
| Figura 21. Posição da esfera no eixo Y, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 2$ .....                                                                                                       | 44 |
| Figura 22. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 2$ .....                                                                                                     | 45 |
| Figura 23. Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 2$ .....                                                                                               | 45 |
| Figura 24. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 5$ .....                                                                                                       | 46 |
| Figura 25. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 5$ .....                                                                                                       | 46 |

|                                                                                                                                                                                                |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 26. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 5$ .                                                                       | 47 |
| Figura 27. Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para $\gamma = 5$ .                                                                 | 47 |
| Figura 28. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 50$ e $\theta = 90^\circ$ .                                        | 49 |
| Figura 29. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 50$ e $\theta = 90^\circ$ .                                        | 49 |
| Figura 30. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 50$ e $\theta = 90^\circ$ .                                      | 50 |
| Figura 31. Tensão dos motores nos eixos x e y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 50$ e $\theta = 90^\circ$ .                                 | 50 |
| Figura 32. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 90^\circ$ .                                        | 51 |
| Figura 33. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 90^\circ$ .                                        | 51 |
| Figura 34. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 90^\circ$ .                                      | 52 |
| Figura 35. Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 90^\circ$ .                                | 52 |
| Figura 36. Região de D-estabilidade e autovalores do sistema em malha fechada, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 70^\circ$ . | 53 |
| Figura 37. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 70^\circ$ .                                        | 53 |
| Figura 38. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 70^\circ$ .                                        | 54 |
| Figura 39. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 70^\circ$ .                                      | 54 |
| Figura 40. Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 70^\circ$ .                                | 55 |
| Figura 41. Região de D-estabilidade e autovalores do sistema em malha fechada, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 60^\circ$ . | 56 |
| Figura 42. Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 60^\circ$ .                                        | 56 |
| Figura 43. Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 60^\circ$ .                                        | 57 |
| Figura 44. Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 60^\circ$ .                                      | 57 |
| Figura 45. Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para $\gamma = 2$ , $r = 20$ e $\theta = 60^\circ$ .                                | 58 |
| Figura 46. Tela “Diagrama de Blocos” no Elipse E3.                                                                                                                                             | 60 |
| Figura 47. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante”.                                                                                                       | 61 |

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 48. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Degrau Eixo X” .....       | 62 |
| Figura 49. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Degrau Eixo Y” .....       | 62 |
| Figura 50. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Quadrado” .....            | 63 |
| Figura 51. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Senoide Eixo X” .....      | 64 |
| Figura 52. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Senoide Eixo Y” .....      | 64 |
| Figura 53. Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Circulo” .....             | 65 |
| Figura 54. Tela “Técnicas de Controle” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante” ..... | 66 |
| Figura 55. Tela “Gráfico X-Y” em modo automático, operando com tipo de sinal “Quadrado” .....           | 67 |
| Figura 56. Tela “Gráficos Eixo X” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante” .....      | 68 |
| Figura 57. Tela “Gráficos Eixo Y” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante” .....      | 68 |
| Figura A.1. Seleção da versão do Arduino IDE. ....                                                      | 73 |
| Figura A.2. Demonstração do 3º Passo. ....                                                              | 73 |
| Figura A.3. Continuação da demonstração. ....                                                           | 74 |
| Figura A.4. Seleção da biblioteca no “Gerenciador de Bibliotecas”. ....                                 | 74 |
| Figura A.5. Adicionando bibliotecas.zip no Arduino IDE. ....                                            | 75 |
| Figura A.6. Acesso a área de seleção de portas no Arduino IDE. ....                                     | 76 |
| Figura B.1. Acessando a aba de Downloads do site da Elipse Software. ....                               | 77 |
| Figura B.2. Demonstração do software correto para download. ....                                        | 77 |
| Figura B.3. Inicialização do Elipse E3. ....                                                            | 78 |
| Figura B.4. Integração Inicial ao Elipse E3 Studio. ....                                                | 79 |
| Figura B.5. Acessando os drivers do Elipse E3. ....                                                     | 80 |
| Figura B.6. Acessando o painel de “Configuração do Driver”. ....                                        | 80 |
| Figura B.7. Seção “Modbus” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                  | 81 |
| Figura B.8. Seção “Operations” do painel de “Configuração do Driver”. ....                              | 81 |
| Figura B.9. Seção “Gen SOE” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                 | 82 |
| Figura B.10. Seção “Setup” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                  | 82 |
| Figura B.11. Seção “Serial” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                 | 83 |
| Figura B.12. Seção “Ethernet” do painel de “Configuração do Driver”. ....                               | 83 |
| Figura B.13. Seção “Modem” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                  | 84 |
| Figura B.14. Seção “RAS” do painel de “Configuração do Driver”. ....                                    | 84 |

## SUMÁRIO

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO.....</b>                                                            | <b>13</b> |
| <b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>                                                 | <b>15</b> |
| 2.1 INTRODUÇÃO AO CONTROLE MODERNO .....                                            | 15        |
| 2.1.1 Espaço de estados .....                                                       | 15        |
| 2.1.2 Estabilidade segundo Lyapunov .....                                           | 16        |
| 2.1.3 Desigualdades matriciais lineares (LMIs) .....                                | 20        |
| 2.1.4 Realimentação de estado .....                                                 | 21        |
| 2.1.5 Taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estado .....            | 22        |
| 2.1.6 D-estabilidade .....                                                          | 22        |
| 2.2 SISTEMA BALL BALANCER .....                                                     | 24        |
| 2.2.1 Funcionamento do Sistema .....                                                | 25        |
| 2.2.2 Movimento da bola – função de transferência $G_{ps}$ .....                    | 27        |
| 2.2.3 Movimento do servomotor – função de transferência $G_m(s)$ .....              | 29        |
| 2.2.4 Esquema de controle em cascata utilizando PID .....                           | 29        |
| 2.2.5 Representação em espaço de estados.....                                       | 30        |
| <b>3 METODOLOGIA.....</b>                                                           | <b>31</b> |
| 3.1 PROJETO DE CONTROLE VIA LMIS .....                                              | 31        |
| 3.1.1 Condições para estabilidade do sistema realimentado .....                     | 31        |
| 3.1.2 Condições para estabilidade do sistema realimentado e taxa de decaimento..... | 32        |
| 3.1.1 Condições para D-ESTABILIDADE do sistema realimentado .....                   | 33        |
| 3.2 SISTEMA BALL BALANCER DO IFMS-TL .....                                          | 34        |
| 3.3 SISTEMA DE SUPERVISÃO E CONTROLE.....                                           | 36        |
| <b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>                                                | <b>37</b> |
| 4.1 SIMULAÇÕES DO PROJETO DE CONTROLE VIA LMIS .....                                | 37        |
| 4.2 SISTEMA SUPERVISÓRIO .....                                                      | 58        |
| <b>5 CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>                                        | <b>69</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                                            | <b>70</b> |

**APÊNDICE A - TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO ARDUINO IDE E BIBLIOTECAS.....73**

**APÊNDICE B - TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO ELIPSE E3 E CONFIGURAÇÃO  
PARA EXECUÇÃO DO SUPERVISÓRIO.....77**

## 1 INTRODUÇÃO

O controle automático de processos desempenha um papel fundamental no desenvolvimento tecnológico e industrial contemporâneo, sendo essencial para garantir eficiência, segurança e precisão em sistemas dinâmicos. Dentro deste contexto, sistemas de controle não lineares e instáveis, como o *ball balancer*, representam desafios significativos e oportunidades para validação de novas metodologias de controle. Este trabalho tem como foco o projeto de controle para um sistema *ball balancer* com seis graus de liberdade, utilizando técnicas avançadas de controle baseadas em LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) e a integração de um sistema supervisório (SCADA) desenvolvido no *software* Elipse E3.

O sistema *ball balancer* consiste em uma plataforma dinâmica que equilibra uma esfera sobre uma placa através da ação de servomotores, sendo análogo ao clássico problema da bola-viga, porém com maior complexidade devido aos múltiplos graus de liberdade. Sua dinâmica não linear e instável em malha aberta o torna um excelente caso de estudo para aplicação de técnicas de controle. Além disso, sua versatilidade permite sua utilização tanto como ferramenta educacional quanto para pesquisa em controle e automação.

A motivação para este trabalho surge da necessidade de desenvolver soluções acessíveis e eficientes para o ensino e pesquisa em engenharia de controle e automação. Sistemas comerciais, como os produzidos pela empresa Quanser, embora sejam referência na área, possuem custos elevados, inviabilizando sua aquisição por muitas instituições de ensino. Neste sentido, este projeto propõe uma alternativa de baixo custo, utilizando componentes de fácil acesso no mercado nacional, como Arduino Uno, servomotores e uma placa *touchscreen* resistiva para medição da posição da esfera, além de técnicas de impressão 3D para fabricação da estrutura mecânica.

O controle do sistema é realizado através de duas abordagens complementares:

Controle via LMIs: Utilizando realimentação do vetor de estados, o projeto garante D-estabilidade com restrições de taxa de decaimento ( $\gamma$ ), raio ( $r$ ) e ângulo ( $\theta$ ), assegurando um desempenho desejado para o sistema. Esta abordagem foi validada através de simulações computacionais.

Controle PID tradicional: Implementado no Arduino Uno, permite ajuste em

tempo real dos parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  através de uma interface supervisória desenvolvida no Elipse E3.

A interface de supervisão e controle desenvolvida no Elipse E3 permite monitorar a posição da esfera nos eixos x e y, alterar a referência de trajetória e ajustar os ganhos do controlador PID, proporcionando uma experiência interativa para estudantes e pesquisadores. Esta integração entre *hardware* acessível, técnicas avançadas de controle e sistemas SCADA industriais oferece uma solução prática e acessível para a democratização de ferramentas para o ensino e pesquisa em controle e automação.

A relevância deste projeto reside não apenas na aplicação de técnicas avançadas de controle, mas também na sua contribuição para a educação em engenharia, oferecendo uma plataforma acessível e versátil para o estudo de sistemas dinâmicos. Espera-se que este trabalho sirva como base para futuras pesquisas e inspire a adoção de tecnologias similares em outras instituições de ensino.

Este trabalho está organizado em cinco partes principais. Inicialmente, o Capítulo 2 estabelece a fundamentação teórica, abordando conceitos de LMIs, D-estabilidade e sistemas SCADA. Na sequência, o Capítulo 3 detalha a metodologia adotada, abrangendo o projeto do controlador, a construção do protótipo e o desenvolvimento da interface supervisória. A análise dos resultados, integrando simulações e a implementação prática, é apresentada no Capítulo 4. Por fim, o Capítulo 5 encerra o estudo com as considerações finais e as perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo aborda os fundamentos teóricos do controle moderno, incluindo espaço de estados, LMIs e D-estabilidade, a modelagem do sistema *ball balancer* e o funcionamento do sistema de supervisão.

### 2.1 INTRODUÇÃO AO CONTROLE MODERNO

Os sistemas modernos de controle estão cada vez mais intrincados devido à necessidade de se realizar tarefas complexas e de alta precisão e assim, acabam tendo muitas entradas, muitas saídas e serem variantes no tempo. Em razão dos desafios citados e do fácil acesso aos computadores, a Teoria de Controle Moderno tem sido desenvolvida desde aproximadamente 1960, sendo uma ferramenta poderosa na análise e projeto de sistemas de controle atuais. Essa teoria toma como base o conceito de estado e é capaz de descrever sistemas com muitas entradas e saídas (lineares ou não lineares, variantes ou invariantes no tempo) (Ogata, 2010).

#### 2.1.1 Espaço de estados

O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (conhecidas como variáveis de estado), onde seu conhecimento em  $t = t_0$  e o conhecimento da entrada para  $t \geq t_0$ , determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$  (Ogata, 2010).

Se são necessárias pelo menos  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para descrever todo o comportamento dinâmico de um sistema, então, essas  $n$  variáveis formam um conjunto de variáveis de estado. Na prática, é conveniente escolher variáveis de estado que sejam facilmente mensuráveis (Ogata, 2010).

O espaço  $n$ -dimensional, cujos eixos coordenados são formados pelos eixos de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as variáveis de estado, é denominado espaço de estados (Ogata, 2010).

A Teoria de Controle Moderno baseia-se na descrição de um sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. O uso da notação vetorial-matricial simplifica bastante a representação matemática do sistema de equações (Ogata, 2010).

Em um sistema dinâmico, seu número finito de elementos concentrados pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias (o tempo é a variável independente). Utilizando a notação citada no parágrafo anterior (vetorial-matricial), uma equação diferencial de ordem  $n$  pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem.

A forma genérica é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \quad (1)$$

$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Na forma compacta:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4)$$

sendo:

$u(t)$ : entrada do sistema;

$y(t)$ : saída do sistema;

$x_i(t)$ : estados internos;

$a_{ii}, b_i, c_i$ : parâmetros do sistema;

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.1.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Em geral, nos sistemas de controle, a estabilidade é o requisito mais importante a ser definido. Caso o sistema seja linear e invariante no tempo, existem diversos métodos para analisar sua estabilidade (Critério de Estabilidade de Nyquist, Critério de Estabilidade de Routh e Método de Lyapunov, por exemplo). Para sistemas não lineares e/ou variantes no tempo, o segundo Método de Lyapunov é o mais usado, sendo válido para sistemas de qualquer ordem (Ogata, 1985).

Para comprovar a estabilidade de Lyapunov, considere um sistema dinâmico que não tenha entrada forçada, ou seja,  $u(t) = 0$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (5)$$

Para realizar a análise de estabilidade segundo Lyapunov, é preciso introduzir alguns conceitos iniciais (Ogata, 1985).

**Estado de Equilíbrio:** um vetor constante  $x_e$  é dito estado de equilíbrio do sistema (3.1) se  $\dot{x}(t) = Ax(t) = 0$ . Sendo todas as derivadas das variáveis de estado nulas, tem-se que as variáveis de estado não estão variando no tempo e, portanto, o estado do sistema permanece em  $x_e$  e este é denominado estado de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema.

**Estabilidade no Sentido de Lyapunov:** considere uma região de raio  $k$  definida em torno do estado de equilíbrio  $x_e$ . A mesma é representada por:

$$\|x - x_e\| \leq k, \quad (6)$$

sendo  $\|x - x_e\|$  a norma euclidiana, que por sua vez, é definida como:

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}. \quad (7)$$

Considere que  $S(\zeta)$  seja a região que consiste de todos os pontos tais que:

$$\|x_0 - x_e\| \leq \zeta, \quad (8)$$

sendo  $x_0$  o estado inicial e  $S(\vartheta)$  a região que consiste em todos os pontos para os quais:

$$\|x - x_e\| \leq \vartheta, \forall t > 0. \quad (9)$$

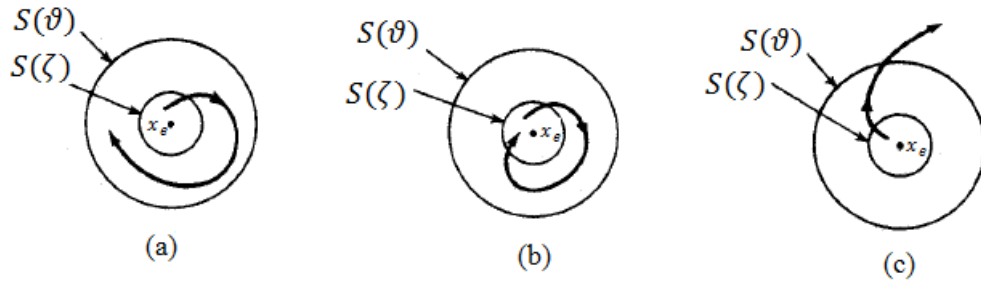
Um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (6) é dito estável de acordo com Lyapunov se, correspondendo a cada  $S(\vartheta)$  houver uma  $S(\zeta)$  tal que as trajetórias iniciadas em  $S(\zeta)$  não deixem  $S(\vartheta)$  à medida que  $t$  aumenta indefinidamente.

**Estabilidade Assintótica:** um estado de equilíbrio  $x_e$  do sistema (6) é dito assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em  $S(\zeta)$  converge para  $x_e$  sem deixar  $S(\vartheta)$  à medida que  $t$  aumenta indefinidamente.

**Instabilidade:** um estado de equilíbrio  $x_e$  é dito instável se, para algum número real  $\vartheta > 0$  e qualquer número real  $\zeta > 0$ , não importando sua dimensão, sempre há um estado  $x_0$  em  $S(\zeta)$  tal que a trajetória começando neste estado deixa a região  $S(\vartheta)$ .

Pela Figura 1, podem-se observar os conceitos de estados de equilíbrio.

**Figura 1.** (a) Estado de Equilíbrio Estável e uma trajetória representativa; (b) Estado de Equilíbrio Estável Assintótico e uma trajetória representativa; (c) Estado de Equilíbrio Instável e uma trajetória representativa.



Fonte: adaptado de (Ogata, 1985).

Para realizar o estudo algébrico também é preciso ter bem definido alguns conceitos adicionais, como de sinais de funções e forma quadrática de funções escalares (Ogata, 1985).

**Função Escalar Definida Positiva:** uma função escalar  $V(x)$  é dita definida positiva em uma região  $\Pi$  se  $V(x) > 0$  para todos os estados não nulos  $x$  na região  $\Pi$  e  $V(0) = 0$ .

**Função Escalar Definida Negativa:** uma função escalar  $V(x)$  é dita definida negativa em uma região  $\Pi$  se  $-V(x)$  é definida positiva.

**Função Escalar Semidefinida Positiva:** uma função escalar  $V(x)$  é dita semidefinida positiva se for positiva em quase todos os estados de uma região  $\Pi$ , exceto na origem e em outros estados de  $\Pi$ , onde seu valor é zero.

**Função Escalar Semidefinida Negativa:** uma função escalar  $V(x)$  é dita semidefinida negativa em uma região  $\Pi$  se  $-V(x)$  é semidefinida positiva.

**Função Escalar Indefinida:** uma função escalar  $V(x)$  é dita indefinida se na região  $\Pi$  assume tanto valor positivo quanto negativo, independentemente da dimensão da região  $\Pi$ .

**Forma Quadrática de Funções Escalares:** as formas quadráticas constituem de uma classe de funções escalares que desempenham um papel importante na análise de estabilidade. Essa classe de funções pode ser descrita por:

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (10)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz real e simétrica.

A verificação de que a forma quadrática é ou não definida positiva pode ser realizada por meio do critério de Sylvester, que estabelece como condição necessária e suficiente para que a forma quadrática  $V(x)$  descrita em (10) seja definida positiva, que todos os menores principais sucessivos de  $P$  sejam positivos. Ou seja,

$$P_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

ou ainda, basta verificar se todos os autovalores de  $P$  são positivos e, em caso afirmativo, pode-se concluir que  $P$  é dita simétrica definida positiva.

Analisando a estabilidade segundo Lyapunov, considera-se o sistema linear proposto em (6), sendo  $x(t)$  o vetor de estado e  $A$  uma matriz constante e não-singular ( $\det(A) \neq 0$ ), dessa forma, o único estado de equilíbrio é a origem  $x_e = 0$ . Define-se uma função de Lyapunov para esse sistema:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (12)$$

sendo  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica e definida positiva. A derivada de  $V(x(t))$  em relação ao tempo é:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= (Ax(t))^T P x(t) + x(t)^T P (Ax(t)), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t). \quad (14)$$

Como  $V(x(t))$  foi escolhida sendo definida positiva (sempre positiva para  $x \neq 0$ ), para garantir a estabilidade assintótica é preciso que  $\dot{V}(x(t))$  seja definida negativa:

$$\dot{V}(x(t)) = -x(t)^T Q x(t), \quad Q > 0, \quad (15)$$

Comparando as equações (15) e (14):

$$-Q = (A^T P + P A), \quad (16)$$

ou,

$$A^T P + P A = -Q, \text{ com } P = P^T > 0 \text{ e } Q > 0. \quad (17)$$

Considerando os resultados acima, chega-se ao seguinte teorema:

**Teorema 1 (Lyapunov) (Boyd et al., 1994):** considere o sistema descrito por  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , sendo  $x(t)$  o vetor de estado e  $A$  uma matriz não-singular ( $n \times n$ ) constante e com elementos reais. Uma condição necessária e suficiente para que o

estado de equilíbrio  $x_e = 0$  seja assintoticamente estável é que exista uma matriz  $P$  simétrica definida positiva tal que:

$$A^T P + P A < 0. \quad (18)$$

### 2.1.3 Desigualdades matriciais lineares (LMIs)

As chamadas Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) são ferramentas muito usadas na solução de problemas em controle. A história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos tem mais de 100 anos, quando Lyapunov publicou seu trabalho, introduzindo o que chamamos de Teoria de Lyapunov (Boyd et al., 1994). Porém, não existiam muitos algoritmos numéricos para solução dessas LMIs e, apenas recentemente, com o desenvolvimento computacional, que surgiram algoritmos eficazes na solução de LMIs (são os chamados algoritmos de pontos interiores).

Um dos diferenciais das LMIs é que elas podem ser usadas na resolução de problemas que envolvem diversas variáveis matriciais, e também, muitas estruturas podem ser impostas a essas variáveis. Tem-se ainda, que por se tratar de um método flexível na solução de problemas relacionados à engenharia de controle, é relativamente direto formular problemas de controle usando LMIs (Trofino, 2000).

No estudo das Desigualdades Matriciais Lineares é muito importante entender o conceito de matrizes definidas positivas, relacionado ao conceito de forma quadrática definida positiva. Considere uma matriz real  $P$  quadrada e simétrica, ela é definida positiva se:

$$x^T P x > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad P \in R^{n \times n}, \quad x \in R^n. \quad (19)$$

A notação  $P > 0$  será usada para indicar que  $P$  é definida positiva.

Uma LMI é uma desigualdade na forma (Boyd et al., 1994):

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0. \quad (20)$$

Em (20),  $x \in R^n$  é a variável vetorial (suas componentes são  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ), e as matrizes simétricas  $F_i = F_i^T \in R^{m \times m}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , são conhecidas (Boyd et al., 1994). A LMI (20) é uma restrição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $\{x \mid F(x) > 0\}$  é convexo. O mesmo acontece com as desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades de norma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle, como desigualdade de Lyapunov e outras desigualdades matriciais.

Porém, as LMIs são usualmente escritas de outra maneira, sendo suas variáveis matrizes:

$$R + M_1^T P_1 N_1 + N_1^T P_1 M_1 + \cdots + M_n^T P_n N_n + N_n^T P_n M_n < 0, \quad (21)$$

sendo que  $M_i, N_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são matrizes fixas, e  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são matrizes variáveis. Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov (Boyd et al., 1994).

$$A^T P + P A < 0, \quad (22)$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz dada e  $P = P^T$  a variável matricial.

Uma propriedade algébrica importante com relação às LMIs é a transformação da desigualdade quadrática (23) em desigualdade linear (24), através do Complemento de Schur (Boyd et al., 1994).:

$$C > 0, \quad A - B C^{-1} B^T > 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0, \quad (24)$$

sendo  $A$  e  $C$  matrizes simétricas e  $B$  uma variável matricial.

As matrizes simétricas  $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são congruentes se existir  $X = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  não-singular tal que  $A = X^T C X$ . Se  $A$  e  $C$  são congruentes, então,  $A > 0$  se e somente se  $C > 0$ .

#### 2.1.4 Realimentação de estado

Considere o sistema controlável, linear e invariante no tempo descrito na forma de espaço de estados dado em (2) e (3), tem-se:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t),$$

$$y(t) = C x(t),$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz de estados,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estado,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada do sistema e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entrada.

Supondo que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, tem-se que uma lei de controle para a realimentação das mesmas é dada por:

$$u(t) = -K x(t), \quad (25)$$

sendo  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  uma matriz de elementos constantes.

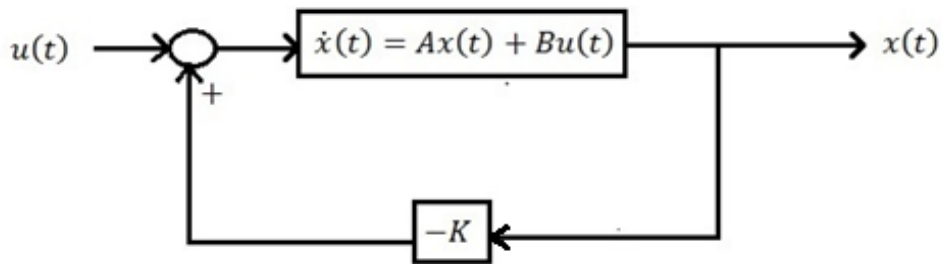
Dessa forma, pode-se reescrever o sistema (2) e (3), utilizando a lei de controle (25), tem-se

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad (26)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (27)$$

A Figura 2 representa um sistema realimentado.

**Figura 2.** Sistema realimentado.



**Fonte:** adaptado de (OGATA, 2010).

### 2.1.5 Taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estado

A taxa de decaimento é um critério de desempenho importante no projeto de controladores, pois ela se relaciona com a velocidade de convergência das variáveis de estado do sistema. Contudo, de forma geral, quanto maior a taxa de decaimento maior a norma do controlador associado. Por outro lado, controladores com norma muito elevada dificultam sua implementação, gerando a necessidade de ponderar esses parâmetros com os interesses do projetista (Alves et al., 2015).

Considerando o sistema controlado (26), a taxa de decaimento é definida como a maior constante positiva  $\gamma$ , tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (28)$$

e ainda, se mantenha para todas as trajetórias  $x(t), t > 0$  (Boyd et al., 1994).

Fazendo uso da função quadrática de Lyapunov:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (29)$$

pode-se determinar um limite inferior sobre a taxa de decaimento do sistema (26) com:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)), \quad (30)$$

para todas as trajetórias.

### 2.1.6 D-estabilidade

Diversas vezes é necessário que os autovalores de malha fechada do sistema estejam alocados dentro de uma determinada região de interesse, com o propósito de

assegurar limites para o sobressinal máximo, o tempo de subida e o tempo de acomodação. Essa região  $S(\gamma, r, \theta)$ , vista na Figura 3, é definida em (Chilali e Gahinet, 1996) e utiliza o conceito de D-estabilidade para a alocação dos autovalores.

Nessa região, os autovalores complexos de um sistema da forma  $x \pm jy$  satisfazem as seguintes condições:

$$x < -\gamma < 0 \quad (31)$$

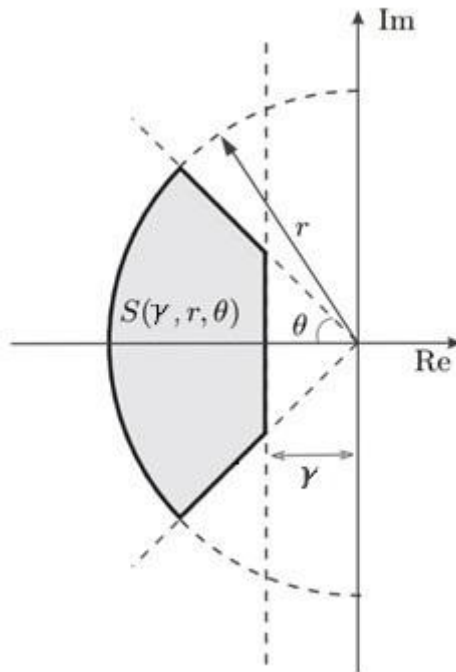
$$|x \pm jy| < r \quad (32)$$

$$\tan(\theta) x < -|y| \quad (33)$$

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem à região  $S(\gamma, r, \theta)$ , o sistema realimentado possui:

- Taxa de decaimento  $\gamma$  mínima;
- Coeficiente de amortecimento  $\zeta > \cos(\theta)$  mínimo;
- Frequência amortecida  $\omega_d < r \sin(\theta)$  máxima (Chilali e Gahinet, 1996).

**Figura 3.** Região  $S(\gamma, r, \theta)$  para alocação de autovalores.



**Fonte:** adaptado de (Chilali e Gahinet, 1996).

## 2.2 SISTEMA BALL BALANCER

Nesta Seção, o objetivo principal é a apresentação do sistema *ball balancer* 2DOF, que servirá de base para o controle do sistema com seis atuadores. A Figura 4 ilustra o sistema 2DOF *ball balancer* fabricado pela Quanser (Quanser, 2008), que possui dois graus de liberdade (em inglês, *two degrees of freedom*, com a sigla 2DOF). Esse equipamento foi utilizado em diversos trabalhos científicos (Souza et al., 2013; Camata et al., 2013; Buzetti et al., 2014; Camata et al., 2014; Vieira et al., 2014; Alves et al., 2015; Louzano et al., 2015; Santos et al., 2015).

O sistema 2DOF *ball balancer* da Figura 4 é composto por dois conjuntos de motores, responsáveis pela movimentação do sistema nos eixos x e y. No topo do sistema existe uma câmera, responsável por medir a posição de uma esfera, que se move livremente sobre uma placa. De acordo com a posição da esfera e a referência que ela deve seguir, os motores movimentam a placa que por sua vez movimenta a esfera. Diferentes técnicas de controle podem ser empregadas para realizar o controle desse sistema, como por exemplo o controle PID (Proporcional, Integral e Derivativo). O sistema 2DOF *ball balancer* é bastante estudado pois se trata de um sistema não linear e instável em malha aberta.

**Figura 4.** 2DOF *ball balancer* fabricado pela Quanser.

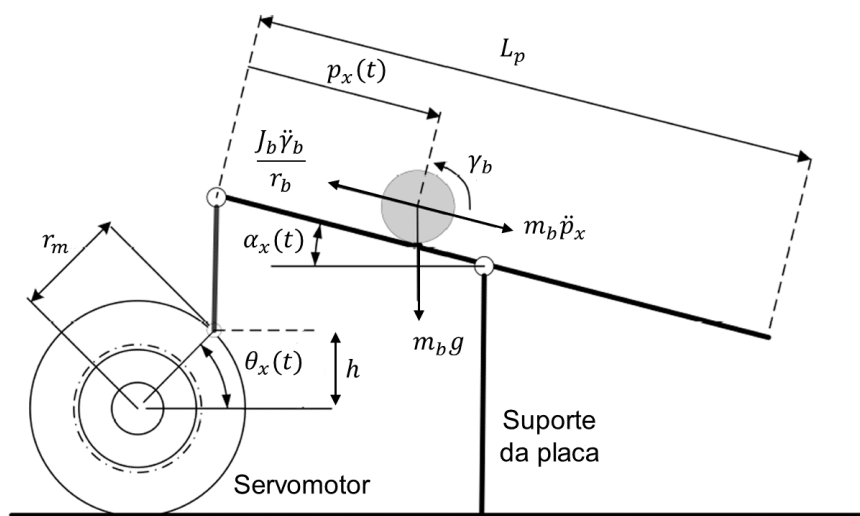


**Fonte:** Adaptado de Quanser (2008).

### 2.2.1 Funcionamento do Sistema

Como observado na Figura 4, o sistema 2DOF *ball balancer* possui dois conjuntos de motores/engrenagens, responsáveis pela movimentação da placa nos eixos x e y. Assume-se que a dinâmica do eixo x é idêntica e desacoplada à dinâmica do eixo y, portanto, o sistema é modelado como dois sistemas de "bola-viga". Na Figura 5, é possível observar o diagrama de corpo livre da bola e da viga que seria a representação da placa.

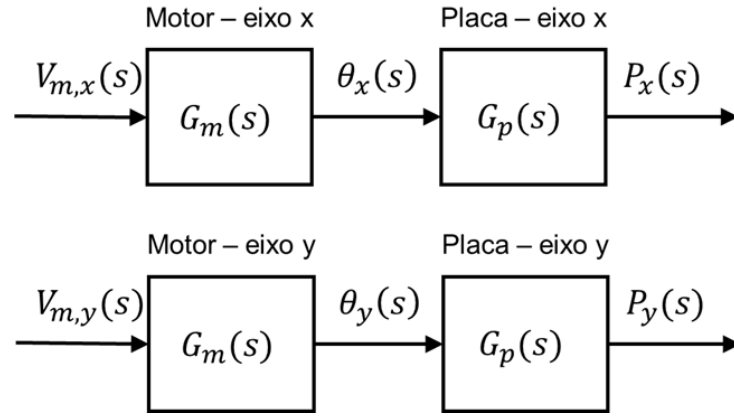
**Figura 5.** Diagrama de corpo livre do eixo x do sistema 2 DOF *ball balancer*.



**Fonte:** Adaptado de (Quanser, 2008).

O sistema completo em malha aberta do 2DOF *ball balancer* é representado pelo diagrama de blocos mostrado na Figura 6. Este é um modelo desacoplado, por exemplo, assume-se que o servo do eixo x não afeta a resposta do eixo y.

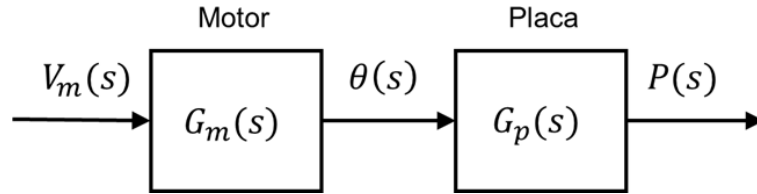
**Figura 6.** Diagrama de blocos do sistema 2 DOF *ball balancer* completo, em malha aberta.



Fonte: Adaptado de (Quanser, 2008).

O diagrama de blocos para um eixo simples do 2DOF *ball balancer*, denotado 1DBB, é mostrado na Figura 7.

**Figura 7.** Diagrama de blocos de malha aberta 1D do 2DOF *ball balancer*.



Fonte: Adaptado de (Quanser, 2008).

A função de transferência  $G_m(s)$  (Quanser, 2008) do servomotor SRV02 representa a dinâmica entre a entrada do servo (tensão do motor  $V_m(s)$ ) e o ângulo de carga resultante  $\theta(s)$ .

$$G_m(s) = \frac{\theta(s)}{V_m(s)} \quad (34)$$

A dinâmica entre o ângulo de carga do servomotor  $\theta(t)$  e a posição da bola  $p(t)$  é descrita pela função transferência  $G_p(s)$  (Quanser, 2008).

$$G_p(s) = \frac{P(s)}{\theta(s)} \quad (35)$$

A seguir são apresentadas algumas convenções para a modelagem do sistema:

- A aplicação de uma tensão positiva faz com que a engrenagem de carga do servo se mova no sentido positivo (sentido anti-horário). Isso move a

placa para cima e faz com que a bola role na direção positiva (ou seja, para direita). Assim  $V_m > 0 \rightarrow \theta > 0 \rightarrow x > 0$ ;

- A posição da bola é zero,  $p = 0$ , quando localizada no centro da placa;
- O ângulo servo é zero,  $\theta = 0$ , quando a placa está paralela ao solo,  $\alpha = 0$ .

### 2.2.2 Movimento da bola – função de transferência $G_p(s)$

Usando este diagrama, a equação de movimento relacionando o movimento da bola,  $p$ , ao ângulo da viga,  $\alpha$ , pode ser encontrado. O somatório de forças no qual a bola está submetida, pode ser relacionado pela segunda Lei de Newton (Halliday et al, 1996).

$$m_b \left( \frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) = F_{p,t} - F_{p,r} \quad (36)$$

Sendo que  $m_b$  é a massa da bola,  $p$  é o deslocamento da bola,  $F_{p,t}$  é a força inercial da bola e  $F_{p,r}$  é a força de translação gerada pela gravidade. Para que a bola esteja em equilíbrio em um determinado ponto, a força do momento da bola deve ser igual à força produzida pela gravidade. Conforme ilustrado na Figura 5, a força  $F_{p,t}$  na direção  $p$  (ao longo da viga) que é causada pela gravidade pode ser encontrada como:

$$F_{p,t} = m_b g \sin(\alpha(t)) \quad (37)$$

O movimento angular da bola  $\gamma_b$  pode ser convertido em movimento linear:

$$p(t) = \gamma_b(t) r_b \quad (38)$$

Sendo  $r_b$  o raio da bola e  $\gamma_b(t)$  o ângulo da bola.

Assim, a força  $F_{p,r}$  pode ser descrita como:

$$F_{p,r} = \frac{\tau_b}{r_b} \quad (39)$$

sendo  $\tau_b$  o torque cuja equação é dada por:

$$\tau_b = J_b \left( \frac{d^2}{dt^2} \gamma_b(t) \right) \quad (40)$$

sendo  $J_b$  o momento de inércia da bola.

Substituindo-se (38) em (40) e posteriormente esse resultado em (39), chega-se a:

$$F_{p,r} = \frac{J_b \left( \frac{d^2}{dt^2} p(t) \right)}{r_b^2} \quad (41)$$

Substituindo (37) e (41) na equação (36) obtém-se a equação não linear de movimento da bola.

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{m_b g \sin(\alpha(t)) r_b^2}{m_b r_b^2 + J_b} \quad (42)$$

Equacionando os ângulos  $\theta$  e  $\alpha$ , pode-se relacioná-los da seguinte forma:

$$\sin(\alpha(t)) = \frac{2 \sin(\theta) r_{arm}}{L_{plate}} \quad (43)$$

Sabendo-se que o seno de um ângulo é aproximadamente o próprio ângulo para ângulos próximos a zero, substituindo (43) em (42), obtém-se a seguinte equação linearizada.

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{2 m_b g \theta r_{arm} r_b^2}{L_{plate} (m_b r_b^2 + J_b)} \quad (44)$$

O momento de inércia de uma esfera sólida (Halliday et al, 1996) é dado por:

$$J = \frac{2 m r^2}{5} \quad (45)$$

Considerando que o sistema (mesa, motor e bola) sempre será o mesmo, pode-se agrupar as constantes da seguinte forma:

$$K_{bb} = \frac{2 m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate} (m_b r_b^2 + J_b)} \quad (46)$$

Logo  $K_{bb}$  torna-se ganho do ângulo  $\theta(t)$  e obtém-se uma equação linear do movimento.

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = K_{bb} \theta(t) \quad (47)$$

Considerando a massa da bola ( $m_b = 0,003 \text{ kg}$ ), a distância do eixo do motor ao ponto de fixação da viga ( $r_{arm} = 2,54 \text{ cm}$ ), o raio da bola ( $r_b = 1,96 \text{ cm}$ ) e o comprimento da mesa ( $L_{plate} = 27,5 \text{ cm}$ ), pode-se calcular o valor de  $K_{bb}$ .

$$K_{bb} = 1,3 \frac{m}{s^2 \text{ rad}} \quad (48)$$

O objetivo é obter a relação entre o ângulo da carga e a posição da bola no domínio da frequência:

$$G_p(s) = \frac{P(s)}{\theta(s)} \quad (49)$$

Para isto, basta aplicar a Transformada de Laplace na equação (46) e então obter:

$$s^2 P(s) = K_{bb} \theta \quad (50)$$

Portanto, a função de transferência  $G_p(s)$  é:

$$G_p(s) = \frac{K_{bb}}{s^2} \quad (51)$$

### 2.2.3 Movimento do servomotor – função de transferência $G_m(s)$

A função de transferência do servomotor SRV02, dada por  $G_m(s)$  em (34), modela a posição da engrenagem de carga do servomotor,  $\theta(t)$  em relação à tensão de entrada do servo,  $V_m(t)$ . O fabricante nos fornece sua função de transferência (Quanser, 2008).

$$G_m(s) = \frac{K_m}{(\tau s + 1)s} \quad (52)$$

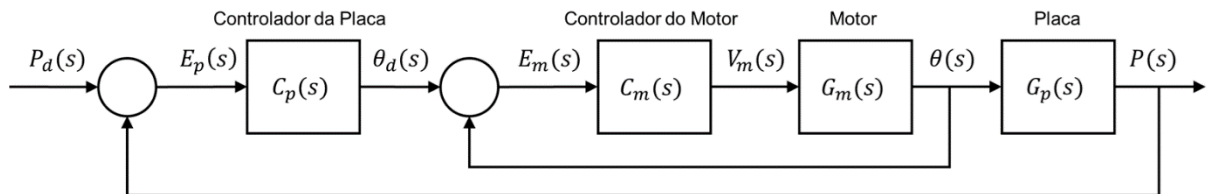
tal que  $K_m = 1,76 \frac{rad}{sV}$  e  $\tau = 0,0285s$ .

A função de transferência dada em (52) representa uma dinâmica típica de um motor de corrente contínua e sua dedução pode ser encontrada em Nise (2012).

### 2.2.4 Esquema de controle em cascata utilizando PID

O esquema de controle utilizado pela Quanser para cada eixo do sistema *2DOF ball balancer* é ilustrado pelo diagrama de blocos da Figura 8.

**Figura 8.** Controle em cascata para o controle de um eixo do *2DOF ball balancer*.



**Fonte:** Adaptado de (Quanser, 2008).

Com base na posição da bola  $P(s)$  medida, a malha de controle externa calcula o ângulo de carga  $\theta_d(s)$  do servomotor para a bola atingir a posição  $P_d(s)$  desejada. Já a malha de controle interna atua no controle da posição do servomotor e deve operar com uma dinâmica significativamente mais rápida que a da malha externa, pois está diretamente associada à atuação dos servomotores, enquanto a dinâmica da esfera depende do deslocamento físico sobre a plataforma.

### 2.2.5 Representação em espaço de estados

Para representar o sistema *ball balancer* no espaço de estados, é necessário converter as funções de transferência  $G_p(s)$  e  $G_m(s)$  em equações diferenciais de primeira ordem. O processo é descrito a seguir.

Como apresentado em (35) e (51) a função de transferência que relaciona a posição da bola  $P(s)$  ao ângulo do servomotor  $\theta(s)$  é dada por:

$$G_p(s) = \frac{P(s)}{\theta(s)} = \frac{K_{bb}}{s^2} \quad (53)$$

Para converter essa função em espaço de estados, define-se:

$$\ddot{p}(t) = K_{bb}\theta(t) \quad (54)$$

Introduzindo as variáveis de estado:

$$x_1 = p(t) \text{ (posição da bola)} \quad (55)$$

$$x_2 = \dot{p}(t) \text{ (velocidade da bola)} \quad (56)$$

Já a função de transferência do servomotor, dada em (34) e (52), é:

$$G_m(s) = \frac{\theta(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{s(\tau s + 1)} \quad (57)$$

Definindo as variáveis de estado:

$$x_3 = \theta(t) \text{ (ângulo do servomotor)} \quad (58)$$

$$x_4 = \dot{\theta}(t) \text{ (velocidade angular do servomotor)} \quad (59)$$

A partir de (55) e (56), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (60)$$

$$\dot{x}_2 = K_{bb}x_3 \quad (61)$$

De (57) é possível obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\tau \ddot{\theta}(t) + \dot{\theta}(t) = K_m V_m(t) \quad (62)$$

Considerando (60), (61) e (62), tem-se:

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (63)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{\tau}x_4 + \frac{K_m}{\tau}V_m(t) \quad (64)$$

Por fim, considere

$$u(t) = V_m(t) \quad (65)$$

Dessa forma é possível obter o modelo matemático em espaço de estados, tal que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (66)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (67)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \ddot{p}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_m/\tau \end{bmatrix} V_m(t), \quad (68)$$

A matriz de saída  $C$  depende da variável medida. Se apenas a posição da bola for observada:

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} p(t) \\ \dot{p}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + [0] V_m(t) \quad (69)$$

O modelo em espaço de estados obtido permite aplicar técnicas avançadas de controle, como realimentação de estado e projeto via LMIs.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados os procedimentos adotados para o desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente são descritas as condições utilizadas no projeto do controlador por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Em seguida, é apresentado o sistema *ball balancer* utilizado no estudo, bem como suas principais características e componentes. Por fim, é descrita a estrutura do sistema de supervisão e controle empregada para o monitoramento e operação da plataforma.

#### 3.1 PROJETO DE CONTROLE VIA LMIS

A seguir serão apresentados os teoremas e LMIs, desenvolvidos por Boyd (1994), e Chilali e Gahinet (1996), necessários para projetar o vetor de realimentação de estado  $K$  da lei de controle (26).

##### 3.1.1 Condições para estabilidade do sistema realimentado

O Teorema 2 (Boyd et al., 1994) apresenta condições para o projeto de controle utilizando a realimentação do vetor de estado, com objetivo de garantir a estabilidade do sistema realimentado.

Teorema 2: considere o sistema descrito por (26). Caso exista uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$XA^T - M^T B^T + XA - BM < 0, \quad (70)$$

então a lei de controle (25), sendo  $K = MX^{-1}$ , torna o sistema (26) estável.

Prova:

Considerando o sistema realimentado dado em (26)

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \quad (71)$$

Nessa situação, o estudo da estabilidade segundo Lyapunov para o sistema realimentado é feito por meio das seguintes LMIs:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) < 0, \quad (72)$$

$$P > 0 \rightarrow P = P^T. \quad (73)$$

Note que a desigualdade (72) acabou se tornando uma BMI (em inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*), de tal modo, é preciso realizar manipulações algébricas para que a mesma atenda novamente à condição de LMIs.

Multiplicando as desigualdades (72) e (73) à esquerda e à direita por  $P^{-1}$ , e fazendo  $X = P^{-1}$ ,  $M = KP^{-1}$  e  $M^T = P^{-1}K^T$  encontra-se:

$$XA^T - M^T B^T + XA - BM < 0, \quad (74)$$

$$X > 0 \rightarrow X = X^T. \quad (75)$$

Dessa forma, as desigualdades encontradas em (74) e (75) são LMIs, e assim, se torna possível projetar uma matriz de realimentação de estado que estabiliza o sistema.

$$K = MX^{-1}. \quad (76)$$

As LMIs apresentadas em (74) e (75) podem ser resolvidas no *software* Matlab®, utilizando os *solvers* YALMIP e LMILAB.

### 3.1.2 Condições para estabilidade do sistema realimentado e taxa de decaimento

O Teorema 3 (Boyd et al., 1994) apresenta condições para o projeto de controle utilizando a realimentação do vetor de estado, com objetivo de garantir a estabilidade e taxa de decaimento do sistema realimentado.

Teorema 3: considere o sistema descrito por (26). Caso exista um escalar  $\gamma > 0$ , uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + 2\gamma X < 0, \quad (77)$$

então a lei de controle (25), sendo  $K = MX^{-1}$ , torna o sistema (26) estável e com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ .

Prova:

Considere como candidata a função de Lyapunov (29). Derivando com relação ao tempo e substituindo o resultado encontrado (71), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T Px(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T (A - BK)^T Px(t) + x(t)^T P (A - BK)x(t) \\ &= x(t)^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]x(t).\end{aligned}\quad (78)$$

Considerando a restrição da taxa de decaimento, substituindo (78) na equação (30) e realizando as simplificações apropriadas, encontra-se:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) < -2\gamma P, \quad (79)$$

$$P > 0. \quad (80)$$

Agora, multiplicando as desigualdades (79) e (80) à esquerda e à direita por  $P^{-1}$ , e fazendo  $X = P^{-1}$ ,  $M = KP^{-1}$  e  $M^T = P^{-1}K^T$  encontra-se:

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + 2\gamma X < 0, \quad (81)$$

$$X > 0. \quad (82)$$

Sendo (81) e (82) factíveis, um controlador que estabiliza o sistema realimentado e garante uma taxa de decaimento  $\gamma$ , é obtido por:

$$K = MX^{-1}. \quad (83)$$

### 3.1.3 Condições para D-ESTABILIDADE do sistema realimentado

O Teorema 4 (Chilali e Gahinet, 1996) apresenta condições para o projeto de controle utilizando a realimentação do vetor de estado, com objetivo de garantir a D-Estabilidade ao sistema realimentado, ou seja, apresenta uma condição suficiente para restringir os autovalores de cada vértice do polítopo, em malha fechada, na região  $S(\gamma, r, \theta)$ .

Teorema 4: O sistema (26), com a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$ , possui autovalores na região  $S(\gamma, r, \theta)$  se existirem uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:

$$AX + XA' - BM - M'B' + 2\gamma X < 0 \quad (84)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX - BM \\ * & -rX \end{bmatrix} < 0 \quad (85)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \cos(\theta)(AX - XA' - BM + M'B') \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (86)$$

Sendo  $\Gamma = \sin(\theta)(AX + XA' - BM - M'B')$   $i \in K_N$ , e a matriz de ganho de realimentação é dada por:

$$K = MX^{\wedge} - 1. \quad (87)$$

### 3.2 SISTEMA BALL BALANCER DO IFMS-TL

Já nesse trabalho foi utilizado o sistema *ball balancer* construído no próprio IFMS campus Três Lagoas. O modelo 3D do sistema 6DOF *ball balancer* (Thingiverse, 2017) está disponível no site: <https://www.thingiverse.com/thing:2038246>. Nesse site é possível baixar gratuitamente todas as partes do sistema. Na Figura 9, é apresentada uma foto do sistema (*ball balancer* 6DOF) implementado no Laboratório de Pesquisa e Controle do IFMS.

**Figura 9.** Sistema ball balancer construído no IFMS.

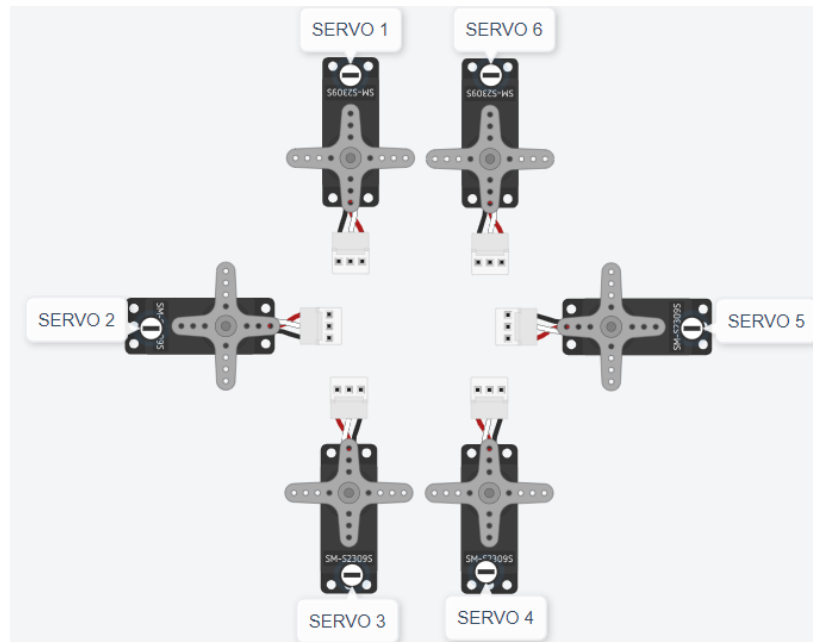


**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Todas as peças pretas foram impressas em ABS utilizando as impressoras do IFMaker do IFMS campus Três Lagoas. O sistema, conhecido como plataforma de Stewart, possui seis atuadores que transformam a movimentação angular do servomotor em uma movimentação linear. Esses seis atuadores podem se mover de forma independente, por isso a sigla 6DOF, ou seja, seis graus de liberdade (em inglês, *six degrees of freedom*). Entretanto, para simplificar o controle do sistema, a movimentação do sistema foi reduzida para dois graus de liberdade, como apresentado no sistema fabricado pela Quanser. Para isso, considere a seguinte

nomenclatura dos servomotores apresentada na Figura 10.

**Figura 10.** Organização de cada servo montado no *ball balancer*.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

No sistema 2DOF *ball balancer*, como visto na Figura 5, observa-se que cada conjunto de motor/engrenagem movimenta o sistema em apenas um eixo, tornando viável a modelagem do sistema que foi apresentada anteriormente. A Figura 10 ilustra o funcionamento do sistema, onde a movimentação é coordenada pelos servomotores de forma a influenciar a posição da esfera nos eixos x e y. Os servomotores 2 e 5 operam em conjunto para deslocar a esfera ao longo do eixo y, enquanto os servomotores 3 e 4 também se movem em pares, porém em sentido oposto aos servomotores 1 e 6, para auxiliar na movimentação no eixo x. O servomotor 2 controla o movimento da esfera ao longo do eixo y, e o servomotor 5 atua em sentido oposto ao servomotor 2. Os servomotores 1-6 e 3-4 são responsáveis exclusivamente pelo movimento no eixo x, e os servomotores 2-5 deveriam controlar apenas o eixo y. No entanto, o movimento dos servomotores 2-5 também afeta a posição no eixo x. Portanto, enquanto os servomotores 2-5 ajustam o eixo y, eles acabam influenciando a posição da esfera no eixo x, que é rapidamente corrigida pelos servomotores 1-6 e 3-4. O sistema possui uma tela resistiva sensível ao toque que é responsável por detectar a posição da esfera. Para realizar o processamento das informações e a implementação da lei de controle, foi utilizado uma placa Arduino UNO. Mais detalhes

dos equipamentos utilizados para a montagem do sistema são apresentados seguir.

### 3.3 SISTEMA DE SUPERVISÃO E CONTROLE

Os sistemas SCADA (*Supervisory Control and Data Acquisition*) são amplamente utilizados em aplicações industriais para monitoramento e controle de processos em tempo real (Boyer, 2009). No contexto deste trabalho, o Elipse E3 foi selecionado como plataforma supervisória devido à sua integração simplificada com microcontroladores (como o Arduino/ESP32) via protocolo Modbus e capacidade de visualização intuitiva de dados.

A arquitetura proposta (Figura 11) segue um modelo hierárquico típico de sistemas SCADA:

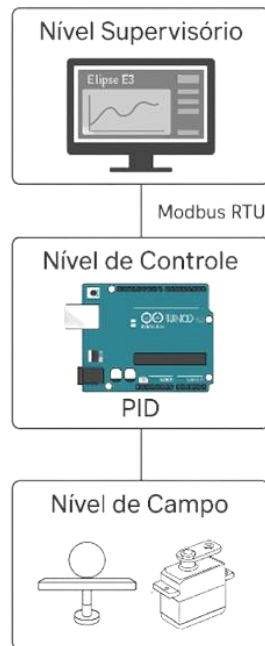
Nível de campo: Composto pelo *hardware* (sensores, atuadores e Arduino), responsável pela aquisição da posição da esfera e atuação dos servomotores.

Nível de controle: Implementa o algoritmo PID e a comunicação Modbus RTU com o supervisório.

Nível supervisório: Interface Elipse E3 para ajuste de parâmetros, visualização de gráficos e registro de dados históricos.

Essa abordagem permite que estudantes interajam com o sistema de forma didática, ajustando ganhos PID e referências enquanto observam os efeitos dinâmicos em tempo real – alinhando-se a metodologias ativas de ensino em automação.

**Figura 11.** Arquitetura de controle proposta.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir do projeto de controle e da implementação do sistema supervisório. Inicialmente, são discutidos os resultados das simulações do projeto de controle via LMIs, considerando as condições para estabilidade do sistema realimentado, estabilidade com taxa de decaimento e D-estabilidade. Em seguida, é apresentada a implementação do sistema supervisório desenvolvido para o monitoramento e interação com o sistema *ball balancer*.

### 4.1 SIMULAÇÕES DO PROJETO DE CONTROLE VIA LMIS

As simulações apresentadas a seguir foram feitas utilizando o *software* MATLAB/Simulink, com a utilização dos teoremas apresentados anteriormente. A partir desses teoremas, foram projetados diferentes controladores baseados em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), de forma a avaliar a influência das restrições impostas sobre o comportamento do sistema.

Nas simulações, o sistema *ball balancer* opera com o tipo de referência “Quadrado”, o que torna mais intuitiva a análise do comportamento dinâmico do sistema. Para cada simulação, são apresentadas as posições da esfera nos eixos x e

y, bem como sua trajetória combinada no plano x-y, representando assim, o deslocamento da esfera sobre a tela *touchscreen*. Em todos os casos, são comparadas a posição real da esfera e a trajetória de referência, possibilitando avaliar o desempenho do controlador. Ao final, são exibidas as tensões aplicadas aos motores de ambos os eixos. Afim de apresentar condições mais próximas da realidade nas simulações, foi aplicada uma perturbação do tipo degrau na entrada do sistema.

Por fim, para cada cenário simulado, são apresentados os valores do ganho de realimentação  $K$ , juntamente com uma análise qualitativa do desempenho do sistema em relação à estabilidade, tempo de acomodação e suavidade da movimentação da esfera.

Além disso, as simulações consideram diferentes restrições de projeto associadas às variáveis  $\gamma$ ,  $r$  e  $\theta$ , que influenciam diretamente a alocação dos polos do sistema em malha fechada. A análise dos efeitos dessas restrições sobre a estabilidade e o desempenho é apresentada nas subseções seguintes, juntamente com os respectivos valores do ganho de realimentação  $K$  obtidos para cada caso.

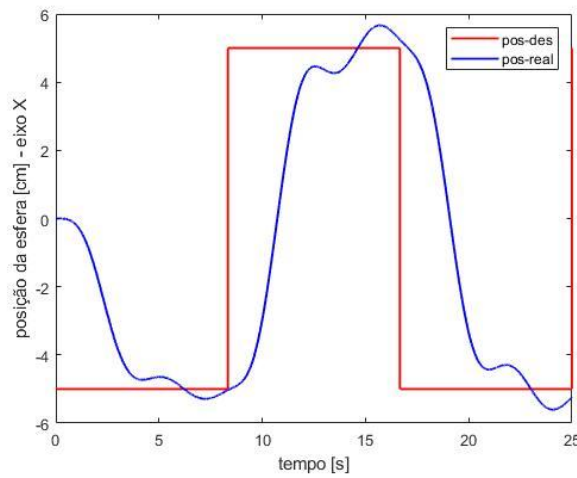
#### 4.1.1 Projeto de controle: condições para estabilidade do sistema realimentado

Nesse caso, o projeto do controlador foi realizado com base nas condições de estabilidade apresentadas no Teorema 2, de modo a garantir que o sistema realimentado permanecesse estável.

Resolvendo as LMIs do Teorema 2 obteve-se o seguinte controlador:

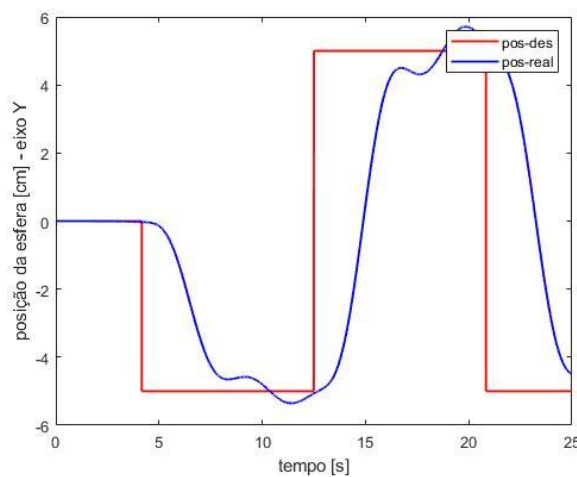
$$K = [0,0426 \quad 0,1035 \quad 0,1606 \quad -0,5111] \quad (88)$$

**Figura 12.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (87) obtido através do Teorema 2.



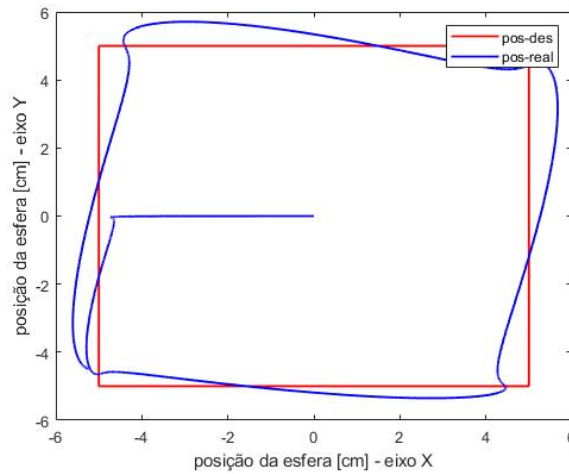
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 13.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2.



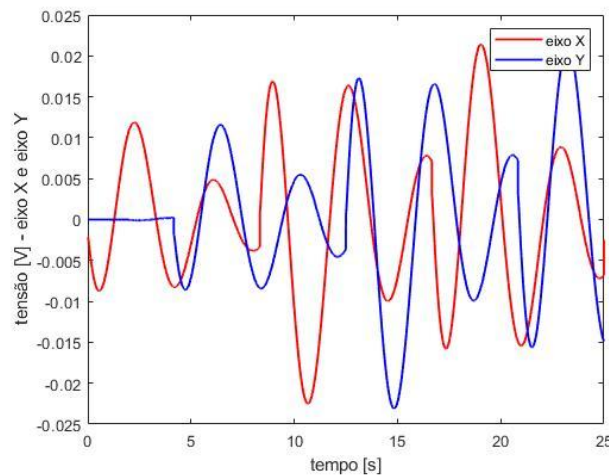
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 14.** Posição da esfera nos eixos x-y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 15.** Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (88) obtido através do Teorema 2.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

A partir das simulações realizadas, observa-se que o sistema apresentou comportamento oscilatório, não sendo capaz de seguir a trajetória de referência de forma satisfatória. Tendo em vista esse resultado, as simulações seguintes consideraram a inclusão da restrição de taxa de decaimento ( $\gamma$ ), conforme estabelecido no Teorema 3 (Boyd et al., 1994).

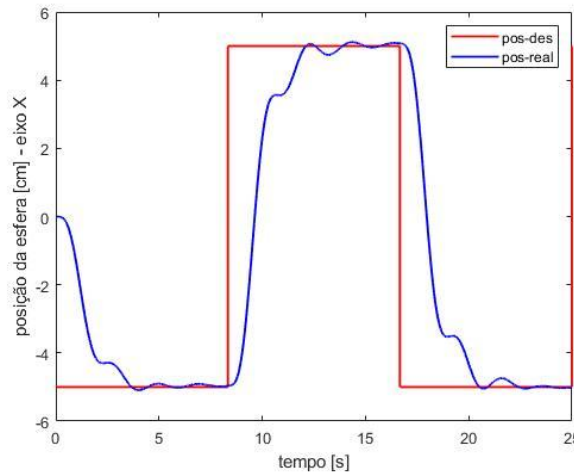
#### 4.1.2 Projeto de controle: condições para estabilidade do sistema realimentado e taxa de decaimento

Essa restrição tem como objetivo deslocar os polos do sistema realimentado mais à esquerda do semiplano imaginário, aumentando a taxa mínima de decaimento e, conseqüentemente, melhorando o desempenho transitório do sistema.

Resolvendo as LMIs do Teorema 3 para  $\gamma = 1$ , obteve-se o seguinte controlador:

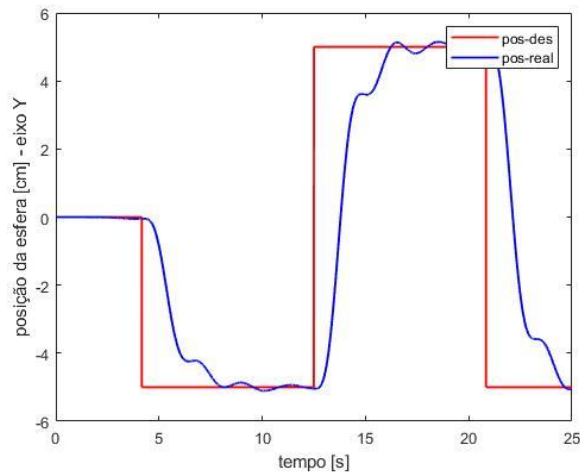
$$K = [0,5521 \quad 0,8338 \quad 0,5968 \quad -0,4385] \quad (89)$$

**Figura 16.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 1$ .



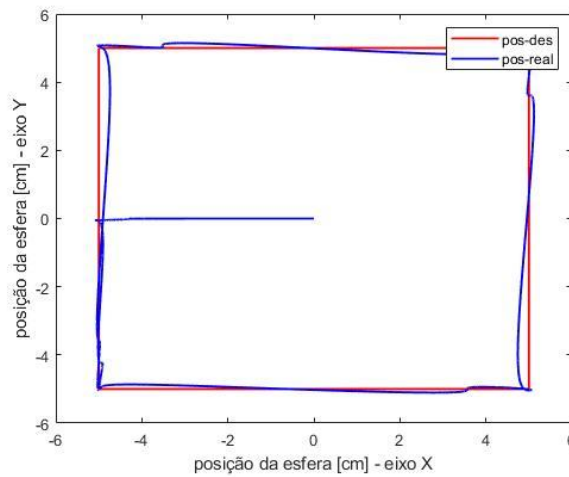
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 17.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 1$ .



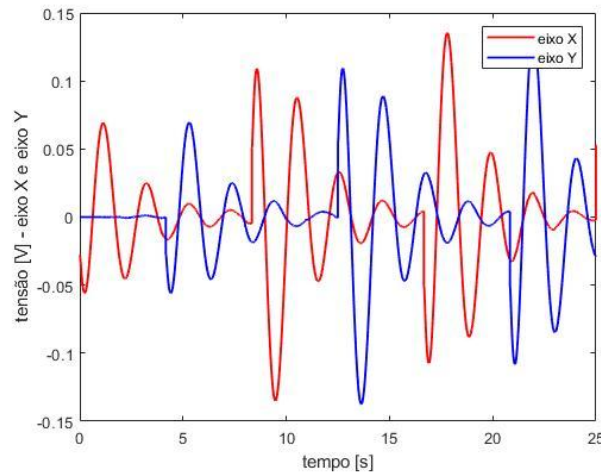
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 18.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 1$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 19.** Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (89) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 1$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

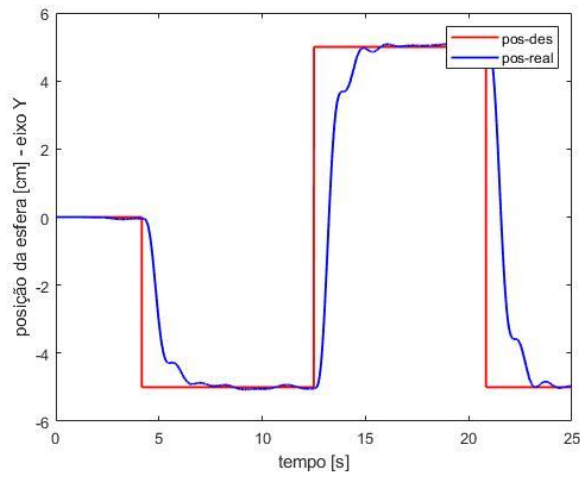
A partir dos resultados obtidos, observa-se que a aplicação da restrição  $\gamma = 1$  proporcionou melhora no desempenho do sistema, reduzindo as oscilações e permitindo que a esfera siga a trajetória de referência com maior precisão. No entanto, ainda foram verificadas pequenas variações em torno da trajetória desejada, além de um tempo de acomodação inviável para implementação prática.

Com o intuito de avaliar a influência de uma taxa de decaimento mais elevada, o próximo teste foi realizado com  $\gamma = 2$ , a fim de verificar se o aumento desse parâmetro resultaria em uma resposta com um tempo de acomodação menor e menos oscilatória.

Resolvendo as LMIs do Teorema 3, com  $\gamma = 2$ , obteve-se o seguinte controlador:

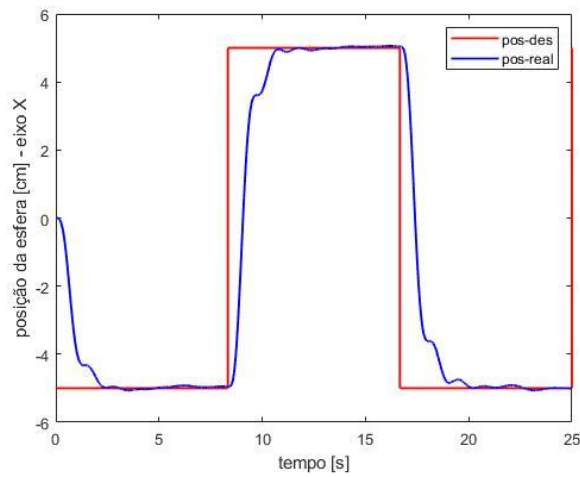
$$K = [5,5461 \quad 4,7913 \quad 1,9264 \quad -0,3298] \quad (90)$$

**Figura 20.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 2$ .



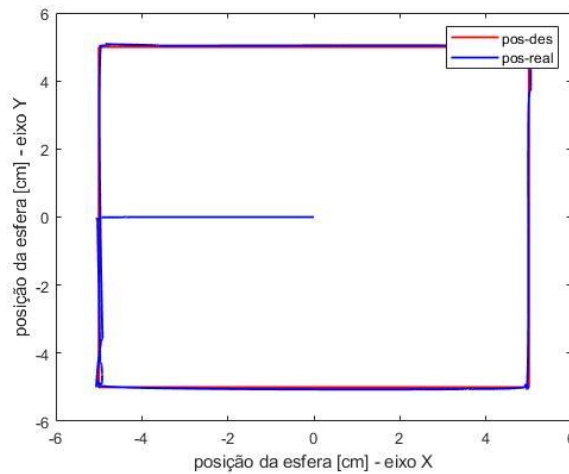
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 21.** Posição da esfera no eixo X, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 2$ .



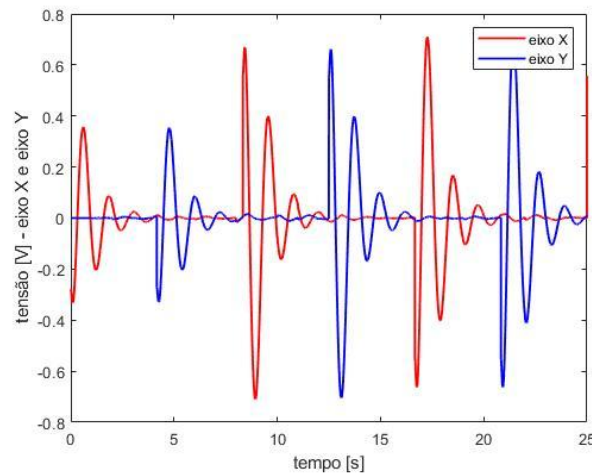
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 22.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 2$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 23.** Tensões dos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (90) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 2$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

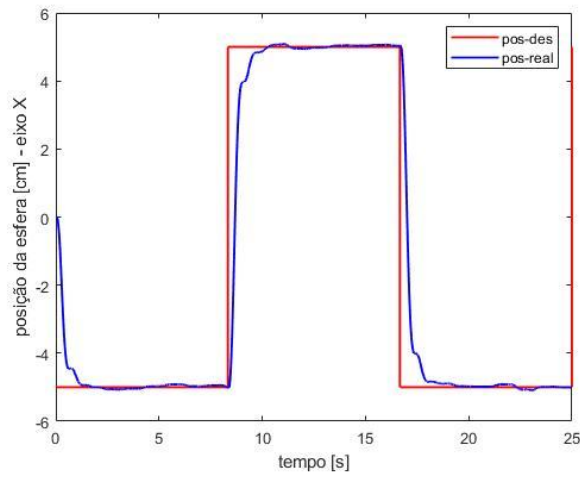
Com o  $\gamma = 2$ , houve uma melhora significativa no desempenho dinâmico do sistema, pois além de menos oscilatório o sistema teve um tempo de acomodação menor, viabilizando uma possível implementação prática.

Resolvendo as LMIs do Teorema 3, com  $\gamma = 5$ , obteve-se o seguinte controlador:

$$K = [161,1815 \quad 62,4253 \quad 11,0181 \quad 0,0171] \quad (91)$$

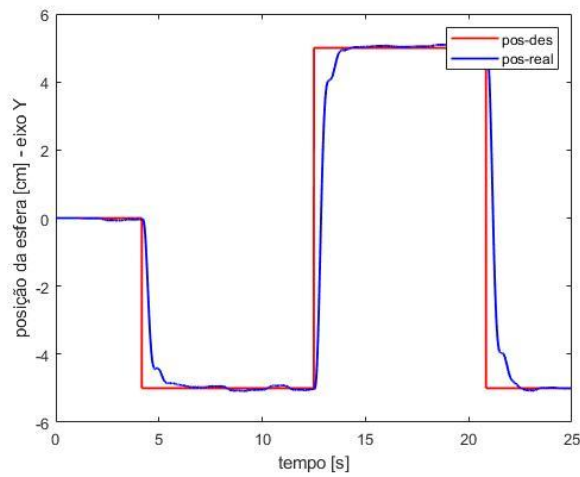
Para a próxima simulação foi aplicado um valor de cinco para  $\gamma$ .

**Figura 24.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 5$ .



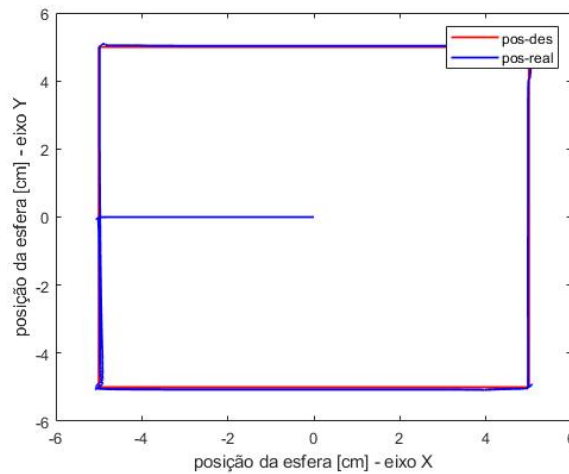
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 25.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 5$ .



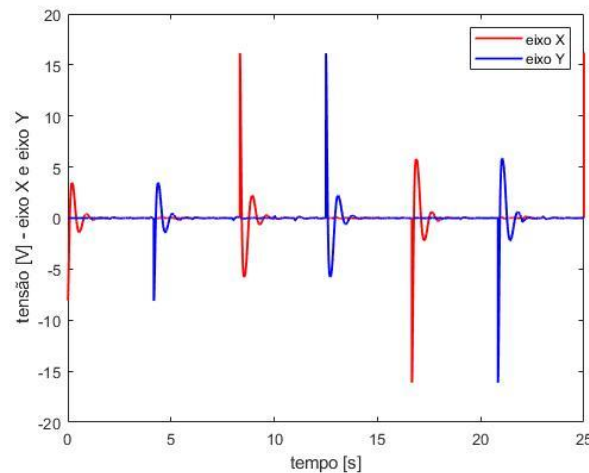
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 26.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 5$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 27.** Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (91) obtido através do Teorema 3, para  $\gamma = 5$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Com  $\gamma = 5$  o desempenho dinâmico do sistema apresenta pouca oscilação, com um tempo de acomodação menor que o obtido com o controlador anterior. Entretanto, a tensão em cada um dos motores ultrapassou os limites físicos de  $\pm 10V$ . Esse resultado indica que mesmo apresentando um desempenho dinâmico compatível com uma possível implementação, o sinal de controle atingiria os valores de saturação do atuador, podendo causar instabilidade ao sistema controlado, visto que a saturação possui uma dinâmica não linear que não foi considerada em projeto.

Aumentando o valor de  $\gamma$  observa-se que o sistema passa a apresentar uma resposta mais rápida e com menos oscilações, melhorando o desempenho dinâmico. Contudo, o aumento desse parâmetro também influencia diretamente nas tensões aplicadas aos motores: quanto maior o valor de  $\gamma$ , maiores são as tensões exigidas pelo controlador, podendo levar o sinal de controle à saturação.

Afim de obter um comportamento que respeitasse os limites de atuação dos motores, mantendo um bom tempo de acomodação e poucas oscilações, o valor de  $\gamma$  que apresentou o melhor resultado foi  $\gamma = 2$ .

A seguir vamos realizar o projeto de controle utilizando as condição de D-Estabilidade.

#### 4.1.3 Projeto de controle: condições para D-ESTABILIDADE do sistema realimentado

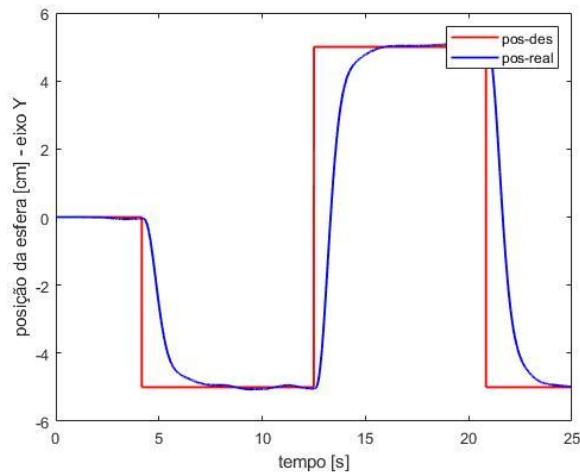
Nesta etapa, investiga-se o comportamento do sistema quando são aplicadas as condições de D-Estabilidade, definidas no Teorema 4, as quais estabelecem uma região específica no plano complexo onde os polos em malha fechada devem ser alocados. A restrição do raio  $r$  define um limite máximo de distância dos polos em relação à origem, enquanto o parâmetro  $\theta$  estabelece o setor angular admissível. Em conjunto com a taxa mínima de decaimento imposta pelo valor fixado de  $\gamma = 2$ , esses parâmetros delimitam geometricamente a região permitida para a alocação dos polos do sistema controlado.

Para analisar a influência específica do raio  $r$ , foram mantidas as restrições  $\gamma = 2$  e  $\theta = 90^\circ$ , variando-se apenas o valor de  $r$ . Essa abordagem permite avaliar como a limitação do módulo dos polos afeta sua posição dentro da região de D-Estabilidade. Para uma primeira análise foi definido um valor de raio  $r = 50$ , não deixando assim, o sistema tão limitado em relação à esta restrição, para que através de uma limitação maior da mesma, ser possível analisar e comparar o impacto desta limitação no comportamento do sistema.

Resolvendo as LMIs do Teorema 4, com  $\gamma = 2$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 90^\circ$ , obteve-se o seguinte controlador:

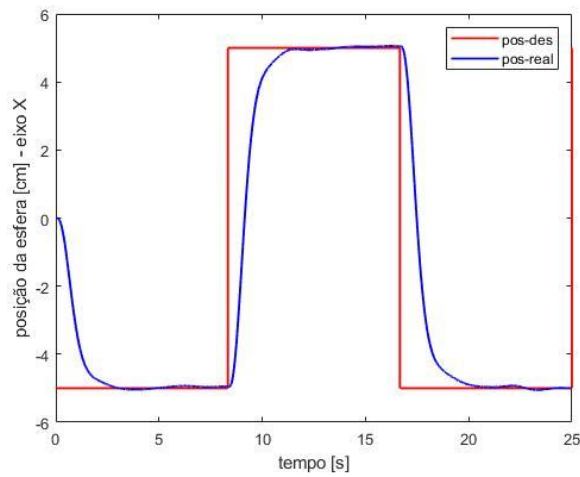
$$K = [12,1128 \quad 11,2044 \quad 4,8457 \quad 0,0836] \quad (92)$$

**Figura 28.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 90^\circ$ .



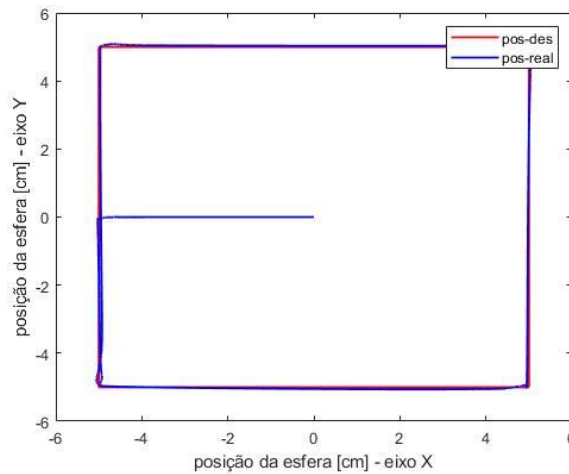
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 29.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 90^\circ$ .



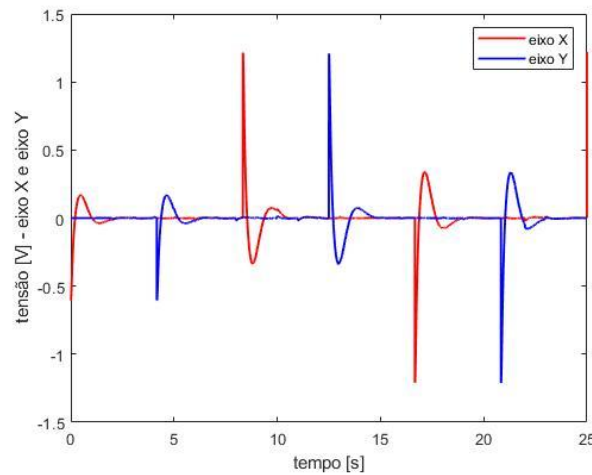
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 30.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 90^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 31.** Tensão dos motores nos eixos x e y, utilizando o controlador (92) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 50$  e  $\theta = 90^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Analisando os resultados apresentados pra  $r = 50$ , conclui-se que o sistema com estes parâmetros apresenta um comportamento aceitável, com menos oscilações, porém com um tempo de acomodação um pouco maior se comparado a resposta escolhida anteriormente, onde o sistema tinha apenas a limitação de  $\gamma = 2$ .

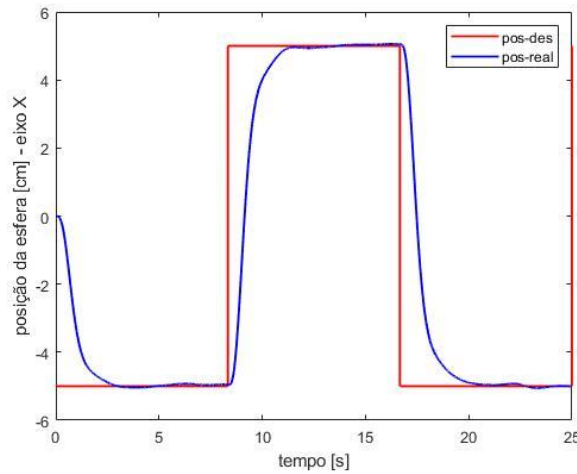
Para verificar o comportamento do sistema com uma região mais restrita, o próximo teste foi realizado com  $r = 20$ , mantendo as demais condições iguais.

Resolvendo as LMIs do Teorema 4, com  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 90^\circ$ , obteve-se o seguinte controlador:

$$K = [7,1951 \quad 6,7246 \quad 2,9245 \quad -0,1675] \quad (93)$$

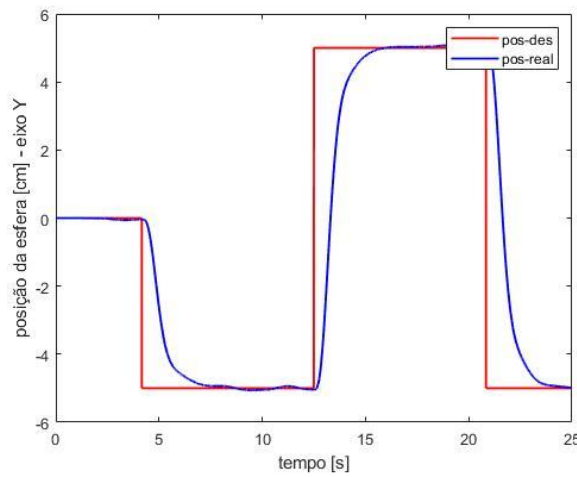
Para o próximo teste  $r$  será alterado para  $r = 20$ .

**Figura 32.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 90^\circ$ .



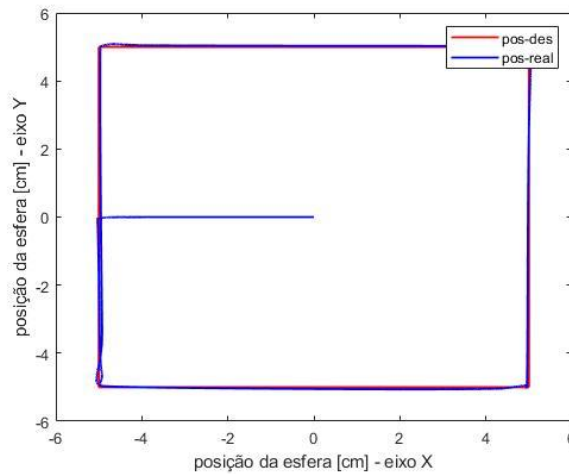
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 33.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 90^\circ$ .



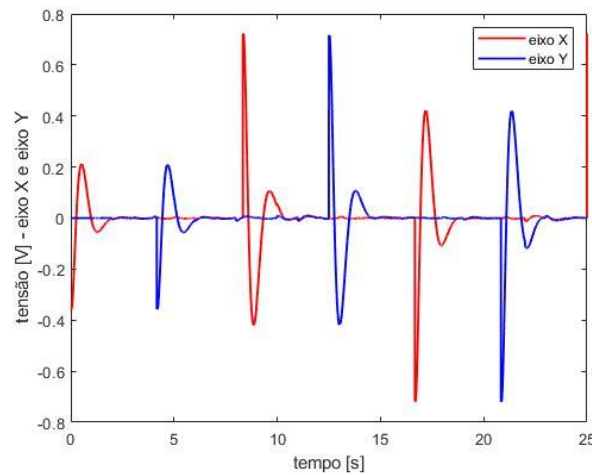
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 34.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 90^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 35.** Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (93) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 90^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

A partir das simulações, observa-se que o sistema manteve um comportamento muito próximo ao obtido quando  $r = 50$ . A diferença mais significativa foi a redução do tempo de acomodação e das tensões aplicadas nos motores, que ficaram menores ao limitar o raio para  $r = 20$ .

Com esse valor, o sistema apresentou uma resposta estável e com poucas oscilações, motivo pelo qual o valor  $r = 20$  será adotado nas próximas simulações.

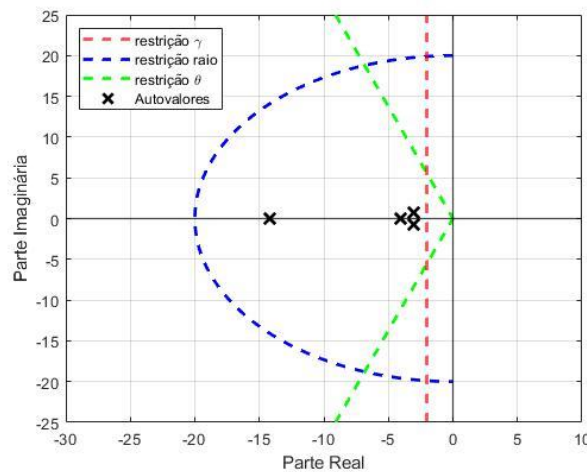
A etapa seguinte consiste em analisar a influência da restrição angular, variando o valor de  $\theta$ , que restringirá ainda mais a região de D-Estabilidade onde os polos podem ser alocados.

Nas próximas simulações, será aplicada a restrição  $\theta = 70^\circ$ .

Resolvendo as LMIs do Teorema 4, com  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ , obteve-se o seguinte controlador:

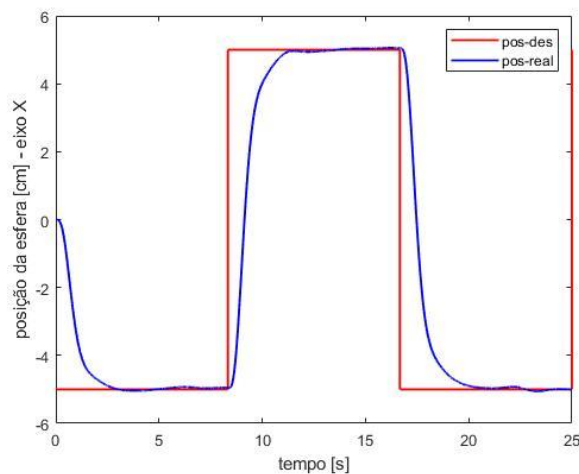
$$K = [7,2179 \quad 6,7137 \quad 2,9098 \quad -0,1734] \quad (94)$$

**Figura 36.** Região de D-estabilidade e autovalores do sistema em malha fechada, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ .



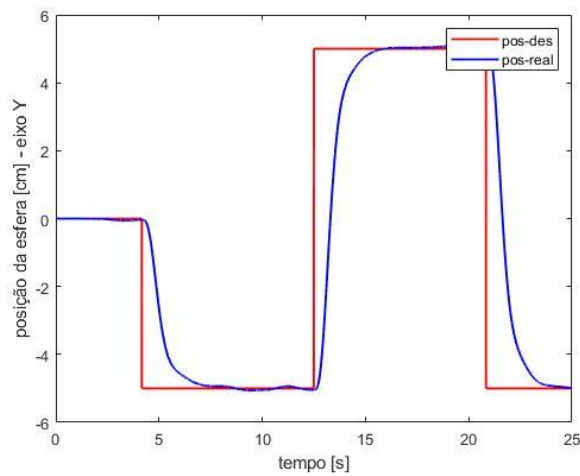
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 37.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ .



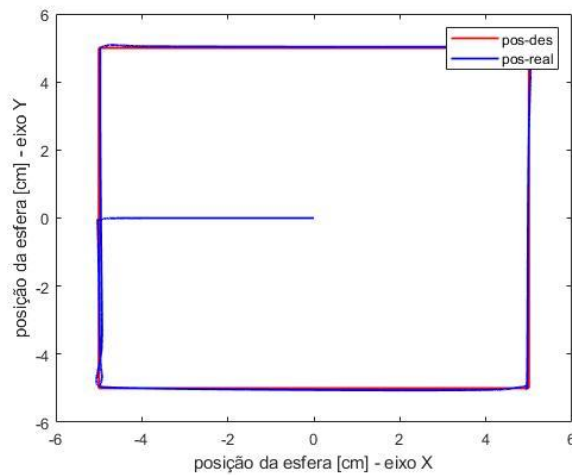
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 38.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ .



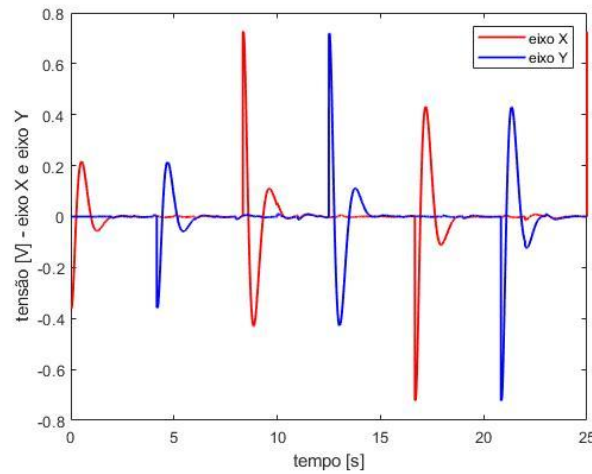
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 39.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para  $y = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 40.** Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (94) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ .



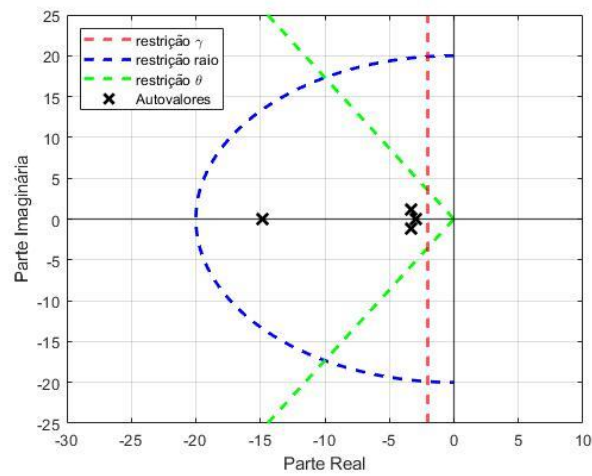
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Com a restrição angular  $\theta = 70^\circ$ , o sistema manteve exatamente o mesmo comportamento dinâmico observado nas simulações anteriores, permanecendo estável, fluido e oscilando muito pouco. A alteração do ângulo apenas modificou o formato da região de D-Estabilidade no plano complexo, deslocando a área permitida para a alocação dos polos. Ainda assim, essa mudança não impactou na resposta do sistema, que permaneceu igual às configurações anteriores.

Resolvendo as LMIs do Teorema 4, com  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ , obteve-se o seguinte controlador:

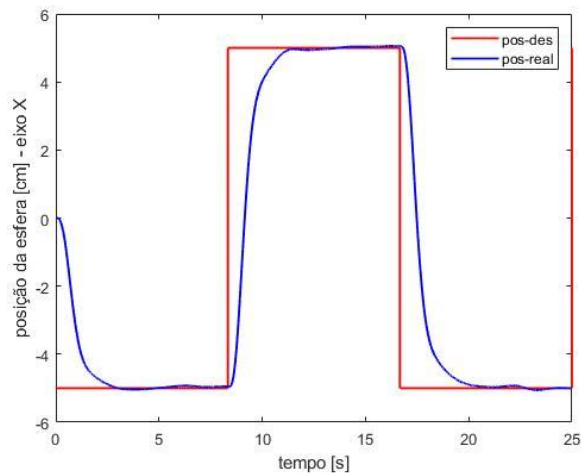
$$K = [6,8727 \quad 6,4533 \quad 2,8354 \quad -0,1722] \quad (95)$$

**Figura 41.** Região de D-estabilidade e autovalores do sistema em malha fechada, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ .



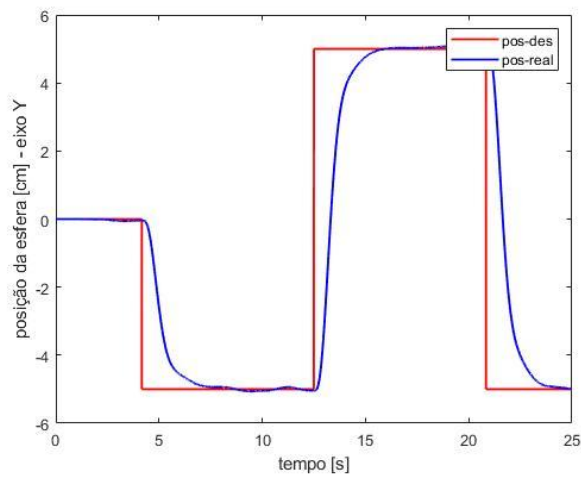
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 42.** Posição da esfera no eixo x, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ .



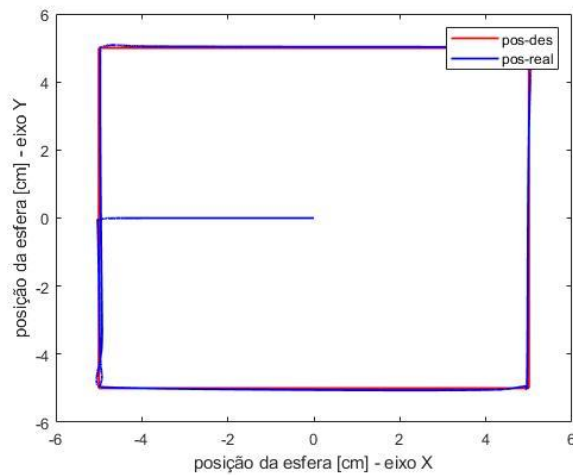
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 43.** Posição da esfera no eixo y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ .



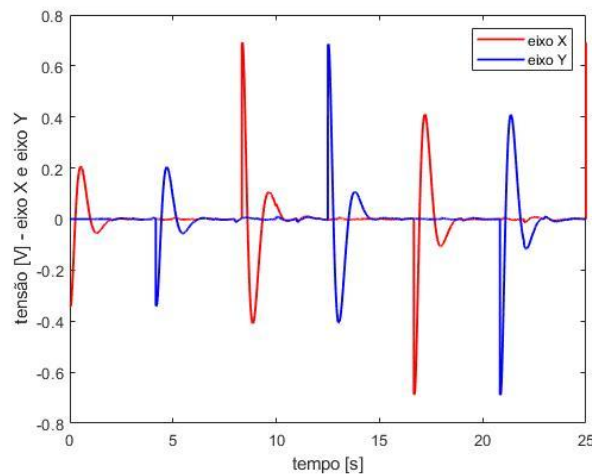
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 44.** Posição da esfera no eixo x-y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

**Figura 45.** Tensões nos motores dos eixos x e y, utilizando o controlador (95) obtido através do Teorema 4, para  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 60^\circ$ .



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Assim como no caso de  $\theta = 70^\circ$ , a simulação com  $\theta = 60^\circ$  não apresentou nenhuma mudança no comportamento do sistema. A resposta permaneceu estável, rápida e praticamente sem oscilações. Essa ausência de diferença ocorre porque os polos do sistema têm parte imaginária muito pequena, permanecendo próximos do eixo real, o que faz com que a variação do ângulo  $\theta$  praticamente não influencie sua localização.

Como a alteração de  $\theta$  não trouxe impacto significativo sobre a dinâmica do sistema, optou-se por utilizar  $\theta = 70^\circ$ , por não restringir demais a região de estabilidade.

Dessa forma, os parâmetros finais adotados para o sistema são  $\gamma = 2$ ,  $r = 20$  e  $\theta = 70^\circ$ , e ganho  $K$  do controlador apresentado em (94).

## 4.2 SISTEMA SUPERVISÓRIO

Nesta seção, é apresentado o desenvolvimento do sistema supervisório, no qual é implementado um controlador PID. Essa escolha se deve ao fato de que, na configuração atual do sistema, tem-se acesso apenas à posição da esfera, não sendo possível obter todo o vetor de estados necessário para a implementação dos controladores baseados em LMIs.

Uma das implementações realizadas no protótipo final foi a integração de um sistema supervisório desenvolvido no *software* Elipse E3, utilizado para o

monitoramento e controle do *ball balancer* em ambiente SCADA. O Elipse E3 foi escolhido por oferecer recursos adequados para a visualização das variáveis do sistema, organização das interfaces e interação direta com o controle, atendendo aos requisitos funcionais do protótipo.

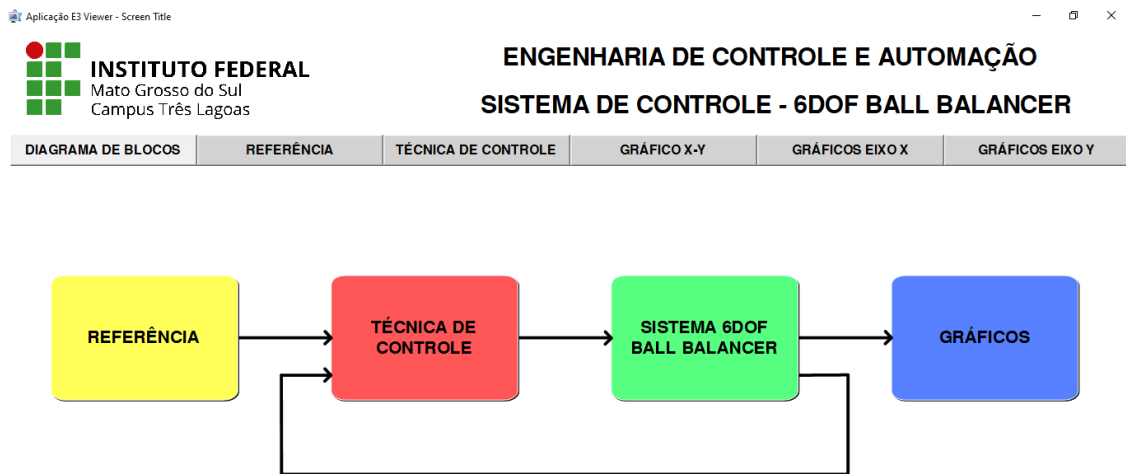
O código de controle foi implementado na plataforma Arduino IDE, responsável pelo processamento das entradas e pela execução das ações de controle. A comunicação entre o Arduino e o Elipse E3 ocorre por meio do protocolo Modbus, permitindo a troca contínua de dados em tempo real e garantindo a sincronização entre o supervisório e o comportamento físico do sistema.

Para tornar a operação mais clara e estruturada, o supervisório foi dividido em seis telas principais, cada uma destinada a uma função específica, como seleção de referência, ajuste de parâmetros de controle e visualização gráfica da dinâmica da esfera. Essa organização facilita a análise do sistema e permite que o usuário acompanhe e modifique o comportamento do protótipo de forma intuitiva.

A tela “Diagrama de Blocos” apresentada na Figura 46, representa a arquitetura geral da malha de controle do sistema. Nela são representados, de forma sequencial, os principais sinais do protótipo, incluindo a referência, o processamento pelas técnicas de controle e a atuação sobre o *ball balancer*, bem como o caminho de realimentação.

Essa representação oferece uma visão inicial do funcionamento do sistema e serve como ponto de partida para a análise das demais telas do supervisório. A navegação para outras interfaces é realizada pelas abas superiores ou pelos elementos interativos presentes na tela.

**Figura 46.** Tela “Diagrama de Blocos” no Elipse E3.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

A tela “Referências” é responsável por definir o comportamento desejado para o protótipo, permitindo a seleção dos modos de operação e dos tipos de sinal aplicados ao sistema. Nessa interface, o usuário pode alternar entre os modos “Automático” e “Manual”, além de configurar sete tipos de referência: Constante, Degrau Eixo X, Degrau Eixo Y, Quadrado, Senoide Eixo X, Senoide Eixo Y e Círculo.

Cada tipo de sinal determina a trajetória que a esfera deve seguir sobre a plataforma, e as variáveis associadas se tornam disponíveis de acordo com a seleção realizada. No modo “Automático”, as variáveis são exibidas com valores predefinidos, enquanto no modo “Manual” o usuário pode ajustar todas as grandezas disponíveis, como posição, amplitude e frequência, conforme o tipo de sinal escolhido.

A interface apresenta também dois gráficos localizados à direita da tela, um para cada eixo do sistema. Esses gráficos exibem simultaneamente a posição real da esfera e a referência definida, com um intervalo de 0,005 segundos entre as atualizações, permitindo visualizar de forma clara o comportamento do sistema e a aderência da esfera à trajetória desejada.

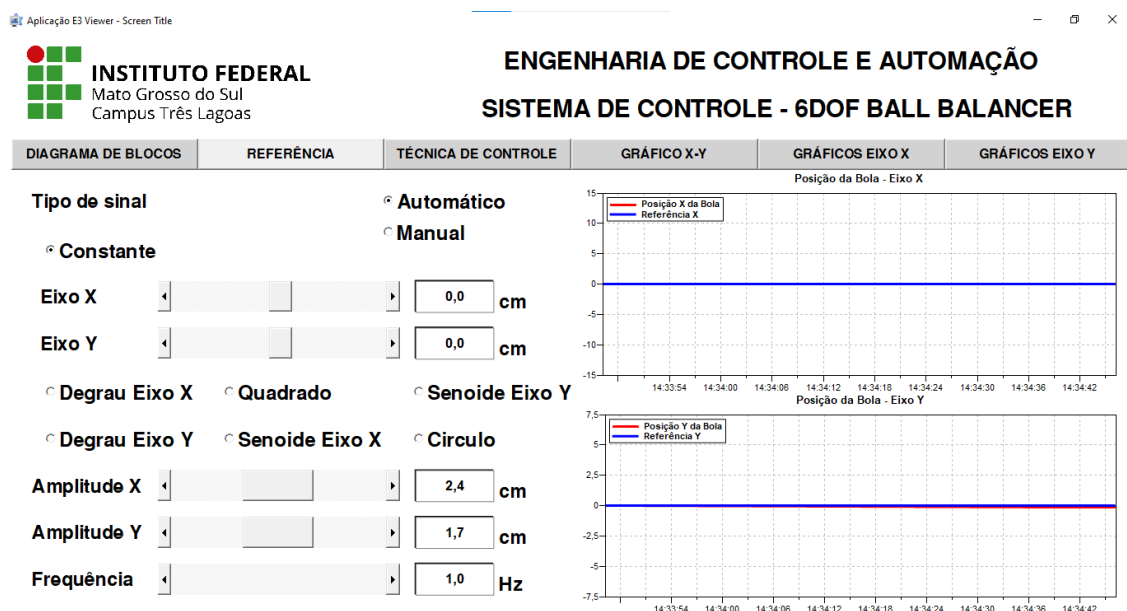
A tela tem como objetivo central fornecer um ambiente de configuração intuitivo, permitindo ao usuário alterar o comportamento do protótipo em tempo real e observar a resposta correspondente por meio dos gráficos dedicados.

A seguir, as Figuras 47 a 53 mostram a tela operando em modo automático, permitindo visualizar como o sistema responde a cada tipo de sinal configurado no

supervisório.

Quando o tipo de sinal “Constante” é selecionado, o sistema permite definir uma posição fixa para a esfera, utilizando as variáveis “Eixo X” e “Eixo Y”. Essas variáveis representam diretamente a referência em cada eixo, tomando o centro da tela como origem. Assim, o usuário pode posicionar a esfera em qualquer ponto da área útil do sistema. Na Figura 47, o sistema opera com amplitude igual a zero nos dois eixos, fazendo com que a esfera permaneça posicionada exatamente no centro da área de atuação.

**Figura 47.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante”.



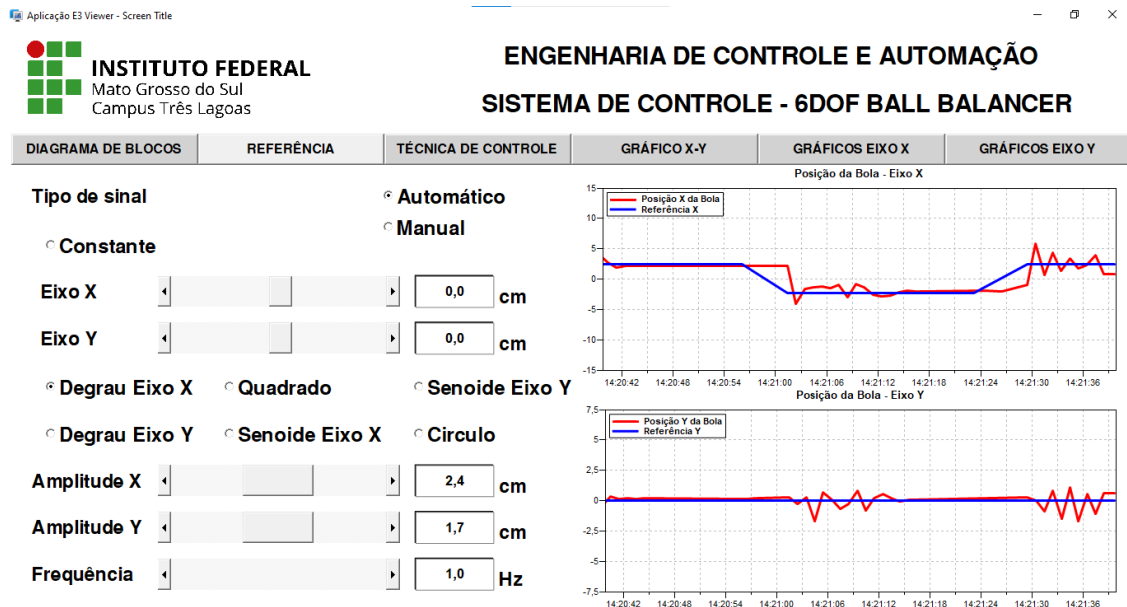
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No tipo de sinal “Degrau Eixo X”, apresentado na Figura 48, o sistema aplica uma mudança repentina apenas no eixo x, enquanto o eixo y permanece na posição central. A variável “Amplitude X” é responsável por definir o valor do degrau aplicado nesse eixo, produzindo uma oscilação simétrica em torno do ponto de equilíbrio. Essa configuração é utilizada para avaliar a resposta transitória e o comportamento do controlador quando o sistema é excitado individualmente no eixo x. Os gráficos evidenciam a mudança da referência e a resposta do sistema apenas nesse eixo.

O mesmo princípio é aplicado ao tipo de sinal “Degrau Eixo Y”, mostrado na Figura 49. Nesse caso, a variável ajustada é a “Amplitude Y”, que define o degrau exclusivamente no eixo y, enquanto o eixo x permanece fixo. Assim, a direção da

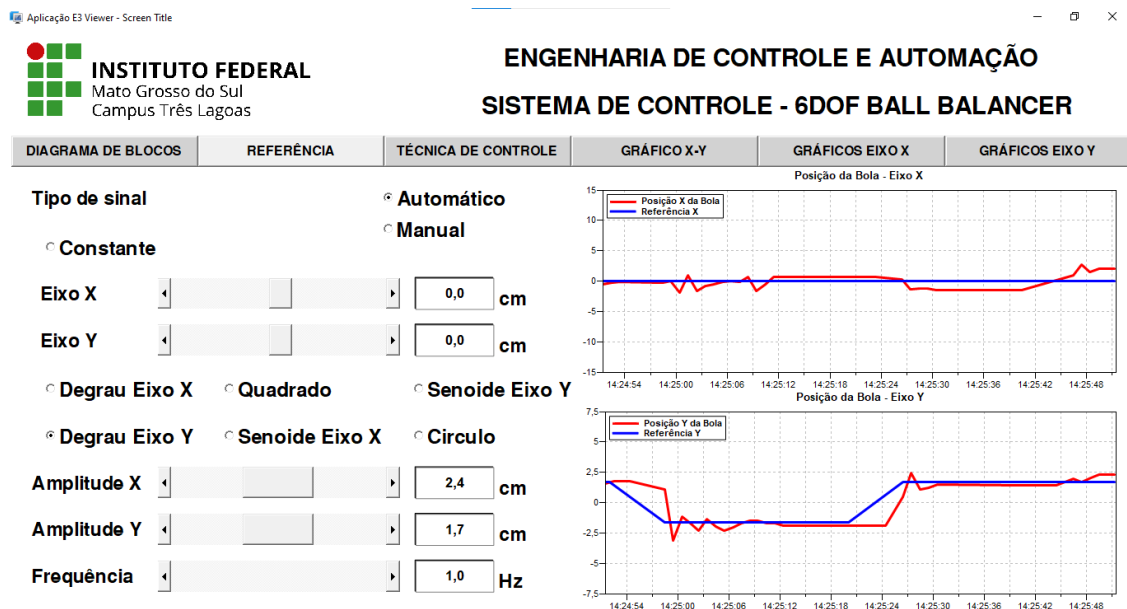
variação é invertida em relação ao sinal anterior, mantendo a mesma estrutura de análise, mas aplicada ao eixo y.

**Figura 48.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Degrau Eixo X”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 49.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Degrau Eixo Y”.



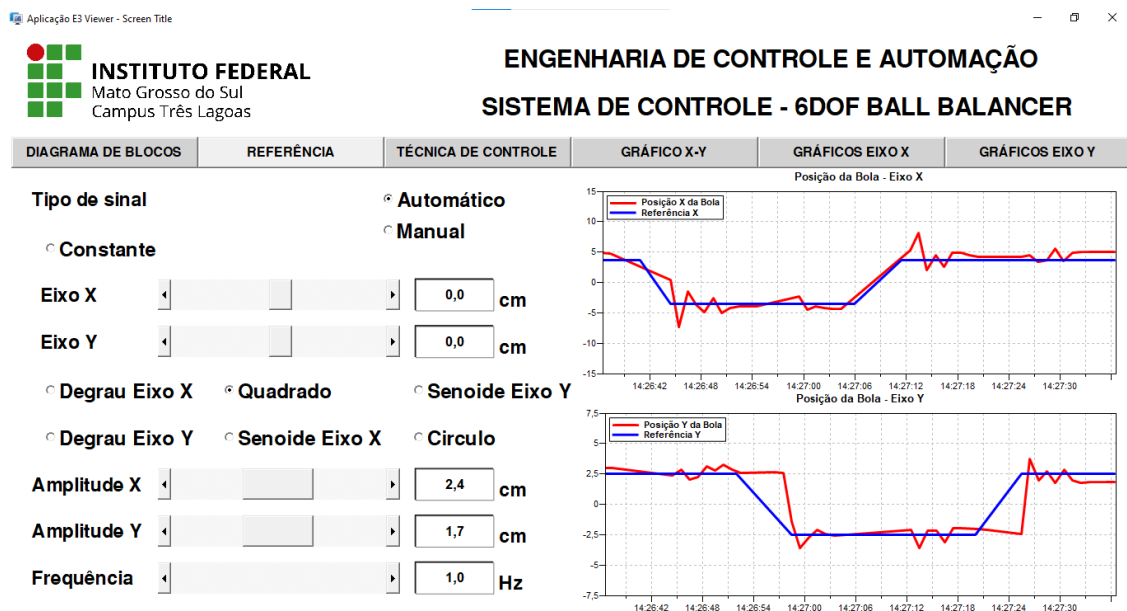
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando o tipo de sinal “Quadrado” é selecionado, o sistema aplica um sinal periódico que alterna entre dois níveis, atuando simultaneamente nos eixos x e y. Nesse modo, é possível ajustar tanto a amplitude quanto a frequência do sistema.

A amplitude define os valores máximos e mínimos atingidos pelo sinal em cada eixo, enquanto a frequência determina a velocidade com que essas alternâncias ocorrem. Dessa forma, o tipo de sinal “Quadrado” permite explorar condições de operação onde o controlador precisa responder a mudanças sucessivas e simétricas da referência.

Na Figura 50, o sistema opera em modo automático com o tipo de sinal “Quadrado” selecionado. Os gráficos mostram a referência alternando de forma periódica e a trajetória da esfera acompanhando essas transições, evidenciando a atuação coordenada dos dois eixos sob esse tipo de excitação.

**Figura 50.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Quadrado”.

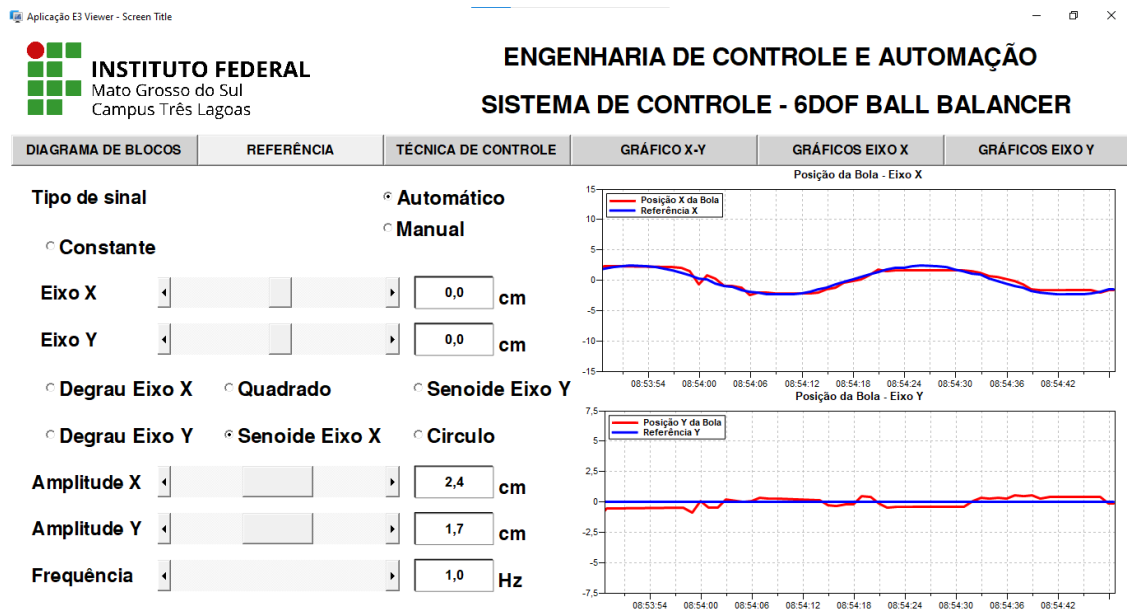


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando o tipo de sinal “Senoide Eixo X” é selecionado, o sistema aplica uma oscilação periódica somente no eixo x, enquanto o eixo y permanece na posição central. Nesse modo, a única variável ajustável é a frequência, que define a velocidade da oscilação, enquanto a amplitude permanece fixa. Esse sinal é utilizado para avaliar a resposta do sistema a movimentos contínuos e repetitivos. Na Figura 51, observa-se a referência oscilando apenas no eixo x, como esperado para esse tipo de sinal.

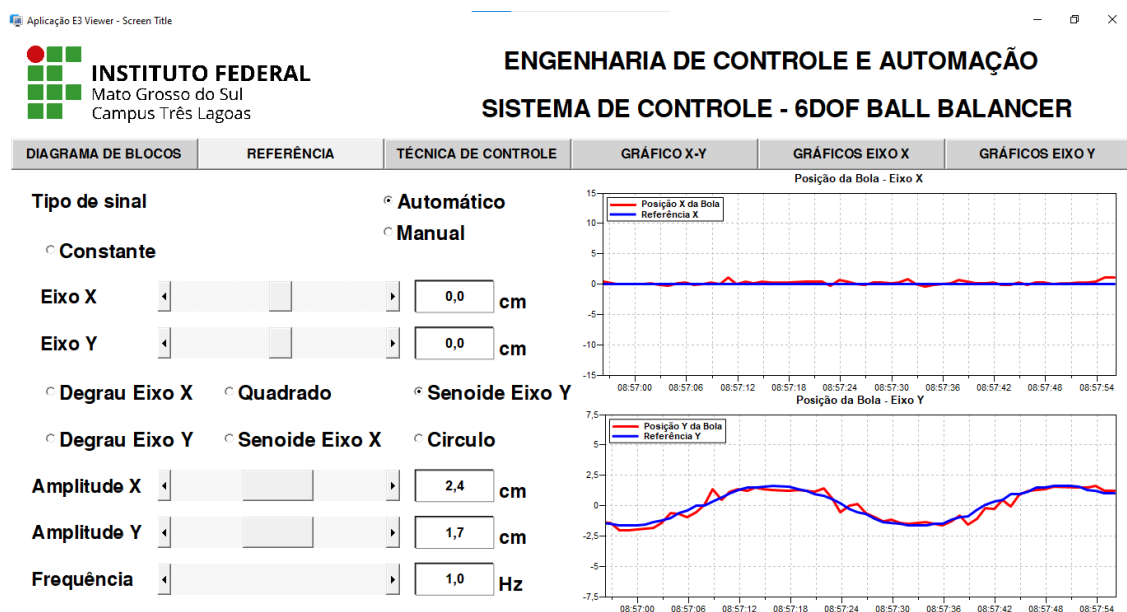
O mesmo princípio se aplica ao tipo de sinal “Senoide Eixo Y”, apresentado na Figura 52. Aqui, a oscilação ocorre apenas no eixo y, e o eixo x permanece fixo no centro. Dessa forma, inverte-se a dinâmica do caso anterior, permitindo analisar o comportamento do sistema quando o estímulo periódico é aplicado no outro eixo.

**Figura 51.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Senoide Eixo X”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

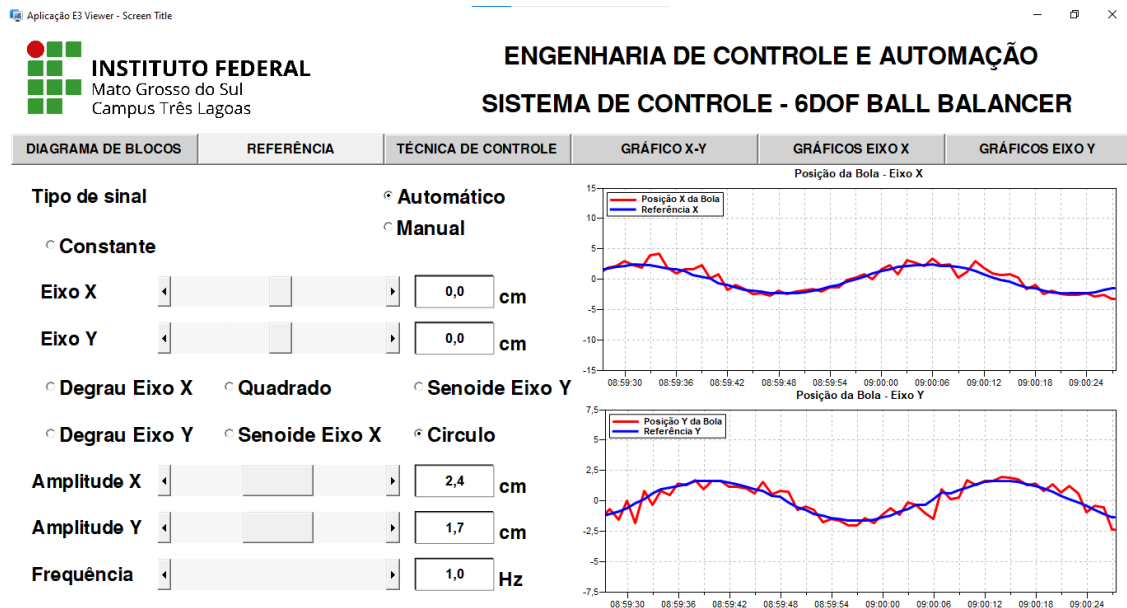
**Figura 52.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Senoide Eixo Y”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No tipo de sinal “Círculo”, o sistema combina dois sinais senoidais, um para cada eixo, com a defasagem necessária para formar uma trajetória circular. Nesse modo, o usuário pode ajustar apenas a frequência, que determina a velocidade com que a esfera percorre o círculo. A amplitude permanece fixa para manter o formato da trajetória. Na Figura 53, é possível ver que a referência desenha um círculo contínuo, permitindo avaliar como o sistema se comporta quando os dois eixos são acionados ao mesmo tempo.

**Figura 53.** Tela “Referência” em modo automático, operando com tipo de sinal “Circulo”.

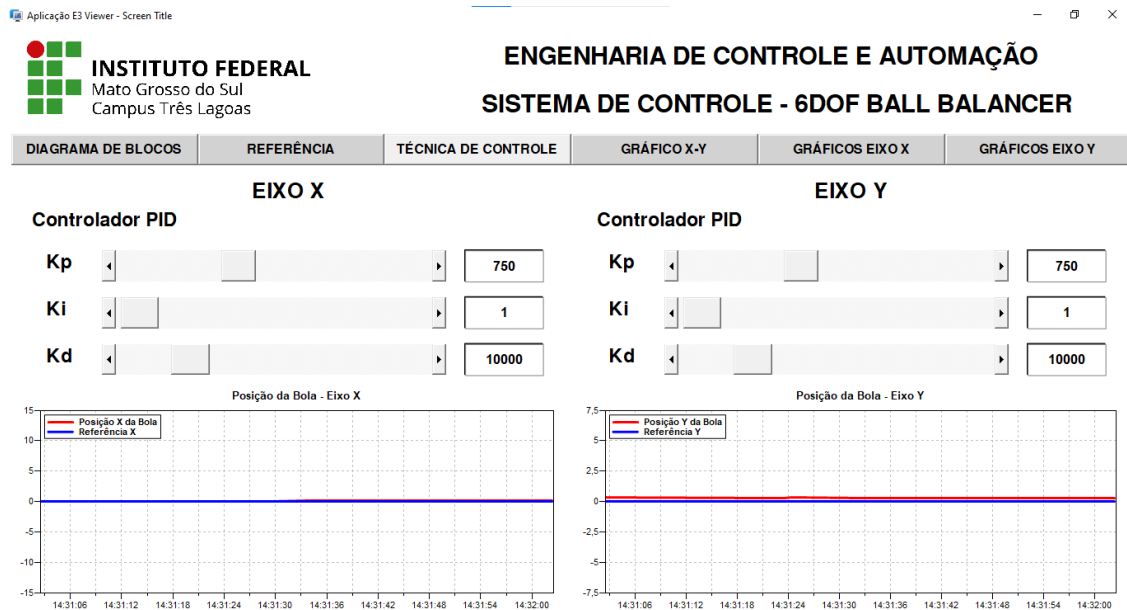


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A tela “Técnicas de Controle”, apresentada na Figura 54, permite ajustar os ganhos  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  do controlador PID utilizado no sistema. Esses parâmetros atuam simultaneamente nos eixos x e y. Embora tenha sido considerada a possibilidade de utilizar ganhos independentes para cada eixo, essa funcionalidade não foi implementada nesta versão, visto que na época que foi avaliada essa implementação o supervisor estava sobrecarregado em relação ao número de *tags* de comunicação do Elipse E3 (máximo de 20 *tags*). Nesta versão final, apresentada aqui neste trabalho, o sistema passou por várias otimizações, tornando assim possível essa implementação, porém a mesma não foi aplicada.

Durante a operação exibida na figura, o sistema utiliza o tipo de sinal “Constante”, mantendo a esfera no centro da área da tela *touchscreen*. Assim, a tela funciona como um ambiente de calibração, no qual o usuário pode observar, em tempo real, como cada alteração influencia a estabilidade e a resposta dinâmica do protótipo. Os gráficos dos eixos x e y, posicionados na parte inferior da interface, auxiliam diretamente nessa análise ao apresentar a trajetória real da esfera frente aos parâmetros selecionados.

**Figura 54.** Tela “Técnicas de Controle” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante”.

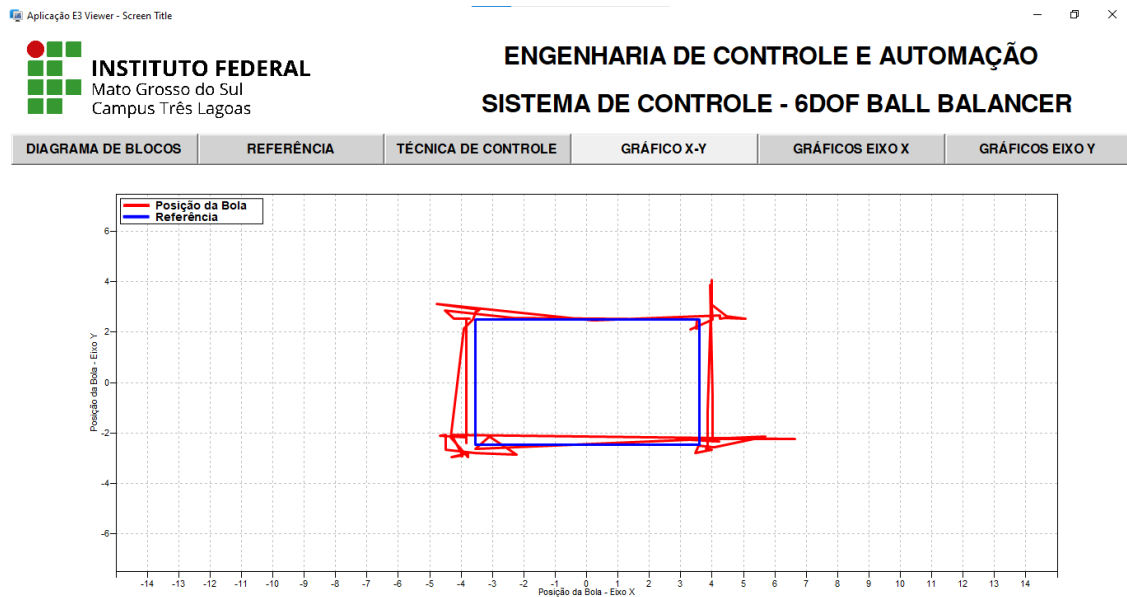


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A tela “Gráfico X-Y”, apresentada na Figura 55, mostra a trajetória da esfera no plano, permitindo visualizar ao mesmo tempo a posição real e a referência. Nessa situação, o sistema opera com o tipo de sinal “Quadrado”, que provoca mudanças rápidas na posição desejada e facilita a observação da resposta do controlador.

Essa visualização conjunta dos eixos x e y ajuda a verificar se a esfera acompanha corretamente o percurso definido, permitindo identificar oscilações, atrasos ou desvios durante o movimento.

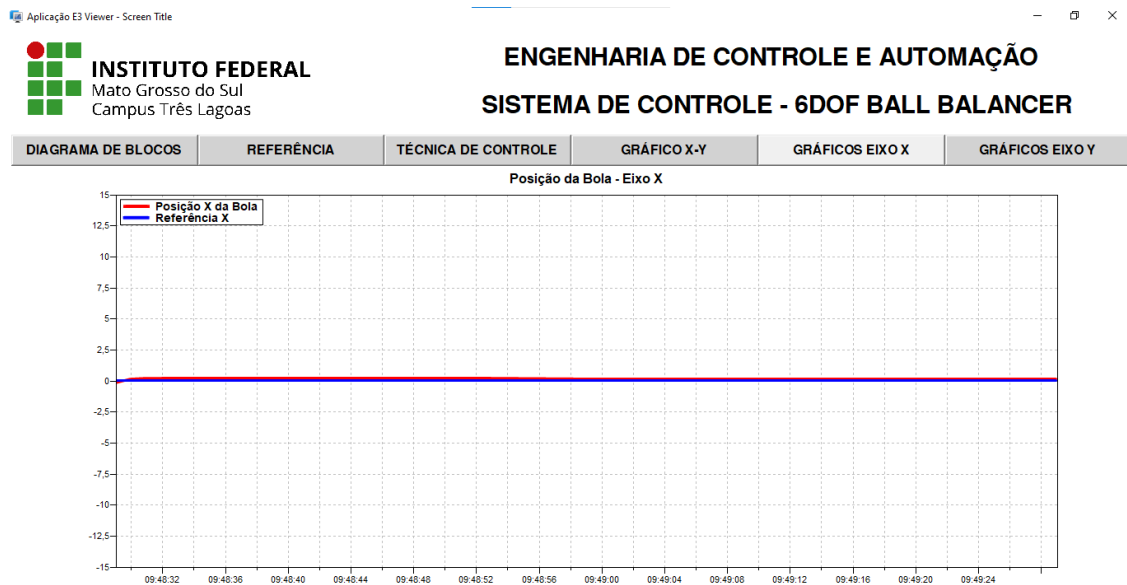
**Figura 55.** Tela “Gráfico X-Y” em modo automático, operando com tipo de sinal “Quadrado”.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

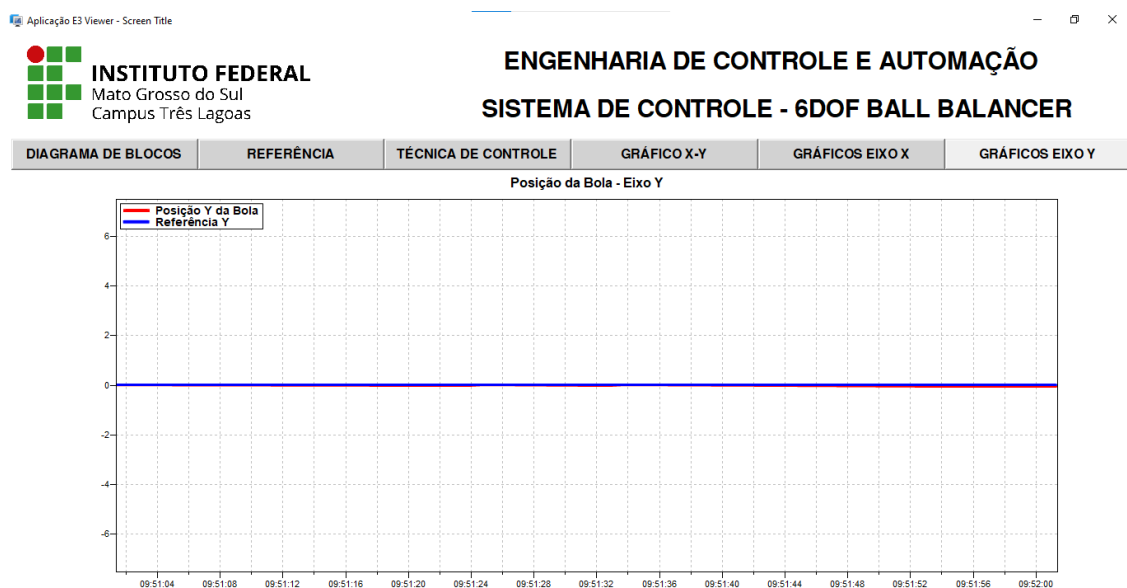
Por fim, as telas “Gráfico Eixo X” e “Gráfico Eixo Y” apresentam, separadamente, a evolução temporal da posição da esfera em cada eixo. Nas Figuras 56 e 57, o sistema opera com o tipo de sinal “Constante”, mantendo a referência no ponto central da tela. Nesses gráficos, é possível observar de forma clara como cada eixo se comporta ao longo do tempo, permitindo avaliar separadamente a resposta do eixo x e do eixo y. Essa visualização ajuda a identificar pequenas variações em cada direção e a confirmar se o sistema está respondendo conforme o esperado, podendo assim ser feita uma avaliação do comportamento dos eixos individualmente.

**Figura 56.** Tela “Gráficos Eixo X” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 57.** Tela “Gráficos Eixo Y” em modo automático, operando com tipo de sinal “Constante”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A utilização do Elipse E3 como sistema supervisor permitiu integrar, em um único ambiente, a visualização completa do funcionamento do *ball balancer* e das técnicas de controle implementadas. Por meio das telas desenvolvidas, é possível acompanhar em tempo real como o sistema responde aos diferentes tipos de sinais e às variações de suas variáveis, além de observar diretamente o impacto das alterações nos ganhos proporcional, integral e derivativo.

Dessa forma, o supervisor não apenas facilita a operação do protótipo, mas também evidencia de forma clara como cada ajuste realizado interfere no comportamento dinâmico do sistema, contribuindo para uma análise mais precisa e intuitiva do desempenho do controlador.

Como trabalho futuro, destaca-se a possibilidade de implementação prática dos controladores baseados em LMIs, mediante a obtenção do vetor completo de estados do sistema.

## 5 CONCLUSÃO/CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o desenvolvimento de um sistema *ball balancer* de baixo custo, integrando técnicas de controle baseadas em LMIs e um controlador PID a um sistema supervisor desenvolvido no *software* Elipse E3. O objetivo foi disponibilizar uma plataforma acessível que permitisse a visualização e a análise do comportamento de um sistema dinâmico instável, tanto em simulação quanto em implementação prática.

O modelo matemático do sistema possibilitou o projeto de controladores via LMIs, garantindo estabilidade e desempenho por meio de critérios de D-estabilidade, cujos resultados foram validados por simulações. Em paralelo, a implementação do controlador PID em ambiente embarcado permitiu ajustes em tempo real dos ganhos, evidenciando de forma prática a influência das ações proporcional, integral e derivativa no comportamento do sistema físico.

A interface supervisória desenvolvida mostrou-se eficiente para o monitoramento da posição da esfera, alteração dos tipos de sinais de referência e ajuste dos parâmetros de controle, facilitando a compreensão do funcionamento da malha de controle e dos efeitos das técnicas implementadas. Assim, a integração entre *hardware* acessível, métodos de controle e um sistema SCADA industrial resultou em uma plataforma didática e funcional, adequada ao apoio ao ensino e à pesquisa em engenharia de controle e automação.

Como trabalhos futuros, propõe-se a ampliação das estratégias de controle, a exploração de novas técnicas avançadas e o aprimoramento do sistema supervisor, visando aumentar a flexibilidade e o potencial educacional da bancada desenvolvida.

## REFERÊNCIAS

Alves, U. N. L. T.; Oliveira, D. R.; Carniato, A. A.; Teixeira, M. C. M. **Controle de sistema ball balancer utilizando LMIs no projeto do controlador**. In: III MOSTRA CIENTÍFICA, CULTURAL E TECNOLÓGICA - IFSP - Campus Presidente Epitácio, 2015, Presidente Epitácio. Anais da III Mostra Científica, Cultural e Tecnológica - IFSP - Campus Presidente Epitácio. Presidente Epitácio: IFSP, v. 1. p. 53-54, 2015.

Boyd, Stephen; El Ghaoui, Laurent; Feron, Eric; Balakrishnan, Venkataramanan. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.

Boyer, S. A. **SCADA: Supervisory Control and Data Acquisition**. 4. ed. ISA, 2009.

Buzetti, A. S.; Teixeira, M. C. M.; Oliveira, D. R.; Vieira, A. R. **Controle de um ball-balancer utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno com planta não linear**. In: XXVI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 2014, Ilha Solteira. Anais do XXVI Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Ilha Solteira: UNESP, 2014.

Camata, R. P.; Assunção, E.; Silva, E. R. P.; Oliveira, D. R.; Alves, U. N. L. T. **Influência de falhas no desempenho do sistema ball balancer**. In: XXV CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 2013, Ilha Solteira. Anais do XXV Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Ilha Solteira: CIC, 2013.

Camata, R. P.; Assunção, E.; Silva, E. R. P.; Buzachero, L. F. S.; Alves, U. N. L. T.; Oliveira, D. R. **Implementação de controlador robusto para o sistema ball balancer sujeito a falhas estruturais**. In: XX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2014, Belo Horizonte. Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática. Belo Horizonte. 2014.

Chilali, M.; Gahinet, P.  **$H^\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach**. IEEE Transactions on Automatic Control, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

Halliday, D.; Resnick, R.; Walker, J. **Fundamentos de Física: Mecânica**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1996. v. 1.

Louzano, A. R.; Teixeira, M. C. M.; Santos, G. F.; Oliveira, D. R. **Projeto e implementação de um controlador para o sistema ball balancer utilizando o método do lugar das raízes**. In: XXVII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 2015, Ilha Solteira. Anais do XXVII Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Ilha Solteira: UNESP, 2015.

Nise, N.S.; Da Silva, F.R., 2012. **Engenharia de sistemas de controle (Vol. 6)**. LTC.

Ogata, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

Ogata, Katsuhiko. **Modern Control Engineering**. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1985.

Quanser. **2D ball balancer Control using QUARC – Instructor Manual**. Canada. 87 p. 2008.

Santos, G. F.; Teixeira, M. C. M.; Louzano, A. R.; Oliveira, D. R. **Um método simples para controlar um sistema ball balancer**. In: XXVII CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 2015, Ilha Solteira. Anais do XXVII Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Ilha Solteira: UNESP, 2015.

Souza, W. A.; Teixeira, M. C. M.; Oliveira, D. R.; Vieira, A. R.; Assunção, E.; Ribeiro, J. M. S.; Silva, E. R. P. **Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado para um sistema 2D ball balancer**. In: XI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE (SBAI), 2013, Fortaleza. Anais do XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. Fortaleza: SBAI, 2013.

Thingiverse. **Ball Balancer 6DOF**. 2017. Disponível em:

<https://www.thingiverse.com/thing:2038246>. Acesso em: 13 mar. 2026.

Trofino, A. **Apostila de controle robusto**. Florianópolis: Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

Vieira, A. R.; Teixeira, M. C. M.; Assunção, E.; Oliveira, D. R.; Buzetti, A. S. **Projeto de controladores via LMIs em uma mesa estabilizadora 2DOF ball balancer utilizando os solvers Sedumi e LMIlab do software Matlab**. In: XXVI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 2014, Ilha Solteira. Anais do XXVI Congresso de Iniciação Científica da UNESP. Ilha Solteira: UNESP, 2014.

## APÊNDICE A - TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO ARDUINO IDE E BIBLIOTECAS

1º Passo: Acesse o link: <https://www.arduino.cc/en/software>;

2º Passo: Após acessar o site, selecione a versão do Arduino IDE compatível com o sistema operacional da máquina utilizada;

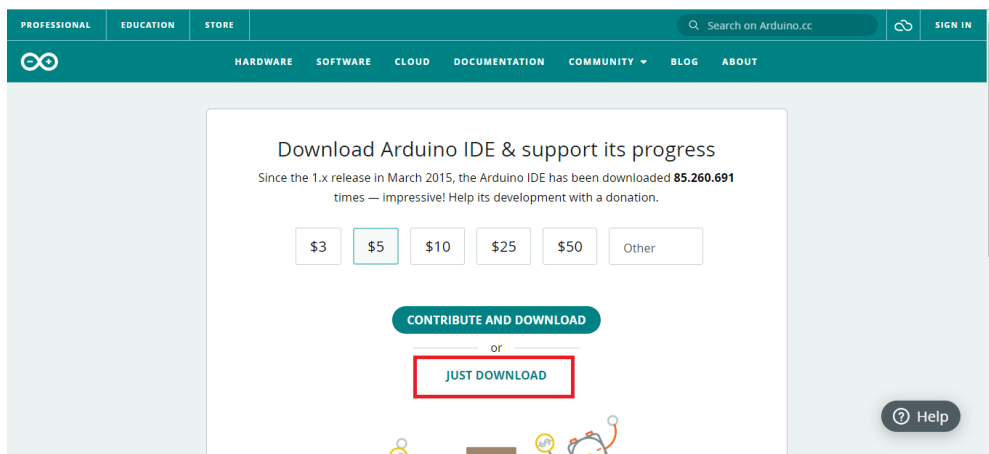
**Figura 58.** Seleção da versão do Arduino IDE.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

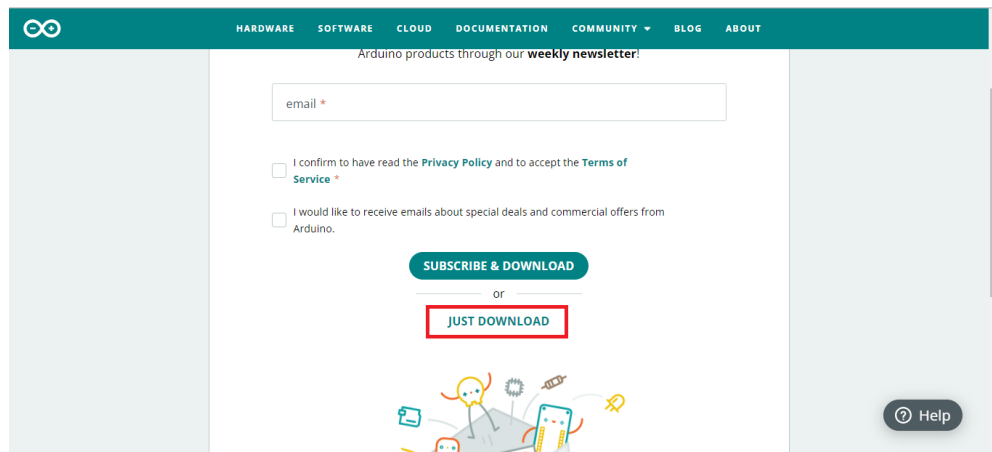
3º Passo: Selecione as opções indicadas nas figuras abaixo;

**Figura 59.** Demonstração do 3º Passo.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 60.** Continuação da demonstração.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4º Passo: Abra o arquivo baixado e prossiga normalmente com o processo de instalação do *software*;

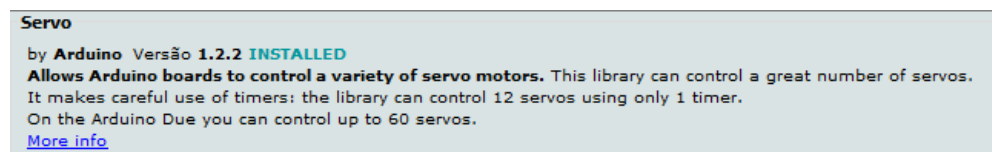
Após a instalação do *software* Arduino IDE, prossiga na instalação das bibliotecas utilizadas no projeto.

### Biblioteca Servo.h:

5º Passo: Abra o Arduino IDE, e acesse a aba “Ferramentas” e selecione a opção “Gerenciar Bibliotecas”;

6º Passo: No gerenciador de bibliotecas, pesquise por “Servo.h” e instale a biblioteca apresentada na figura abaixo;

**Figura 61.** Seleção da biblioteca no “Gerenciador de Bibliotecas”.



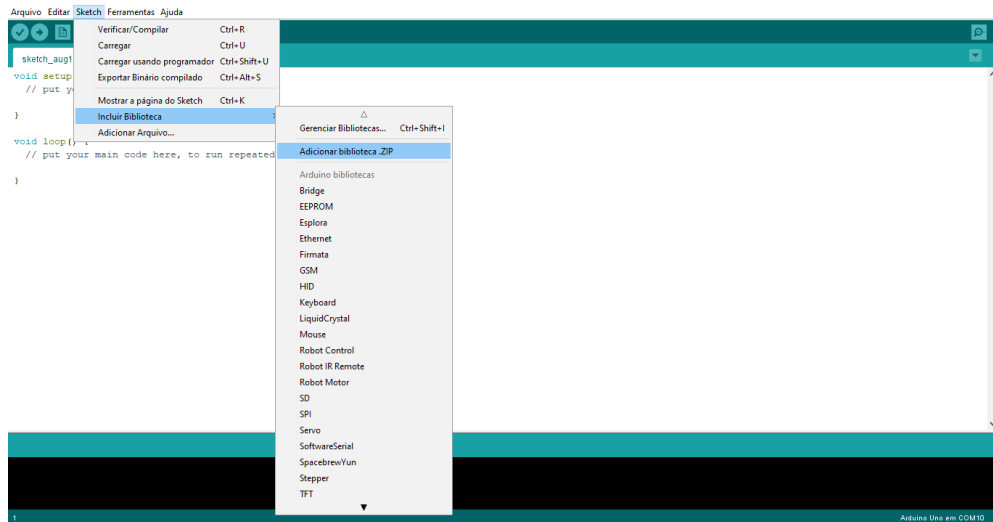
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

### Bibliotecas Modbus do Arduino:

7º Passo: Acesse o link: <https://code.google.com/archive/p/arduino-modbus-slave/downloads>, e realize o *download* do arquivo “MODBUS.zip”;

8º Passo: Abra o Arduino IDE, e acesse a aba “Sketch”, depois “Incluir Biblioteca”, e selecione “Incluir bibliotecas.ZIP”, assim como mostra a figura abaixo;

**Figura 62.** Adicionando bibliotecas.zip no Arduino IDE.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

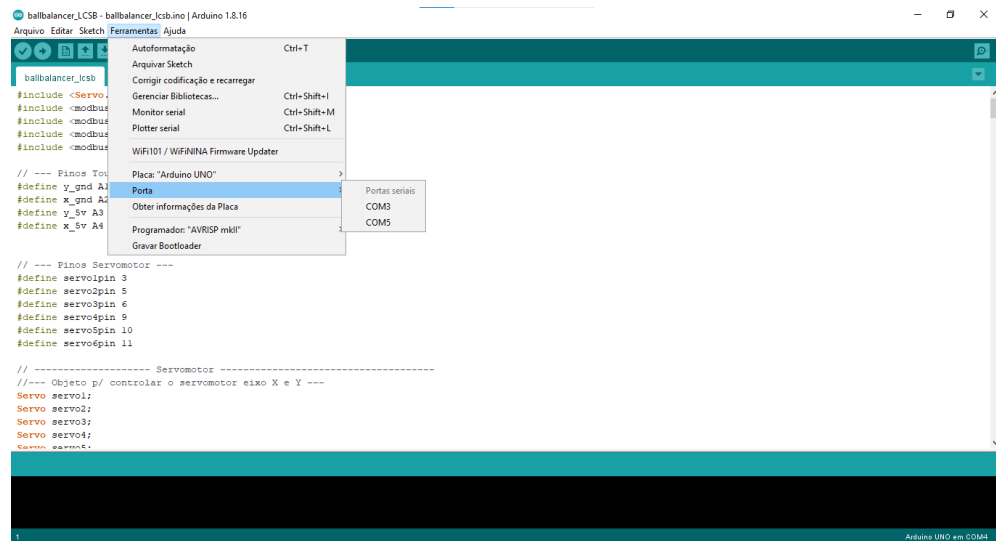
9º Passo: Localize onde foi baixado o arquivo “MODBUS.zip” baixado anteriormente, selecione-o e clique em “Abrir”, com isso todas as bibliotecas Modbus que foram citadas vão ser incluídas no Arduino IDE;

Com isto, todas as bibliotecas necessárias para carregar o código no Arduino já estão incluídas no *software*, com isto abra o código do sistema disponível no link: <https://github.com/d-oliveira/TCC-Leonardo-Caetano-Bassaga-2026>

Após abrir o código, é necessário selecionar a porta em que será conectado o Arduino no computador utilizado. Para isso, acesse as abas “Ferramentas” e “Porta”, selecionando a porta correspondente ao dispositivo conectado ao computador.

Para conferir qual porta está selecionada no *software*, ou selecionar uma porta específica, acesse as opções assim como apresentado na figura abaixo.

**Figura 63.** Acesso a área de seleção de portas no Arduino IDE



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

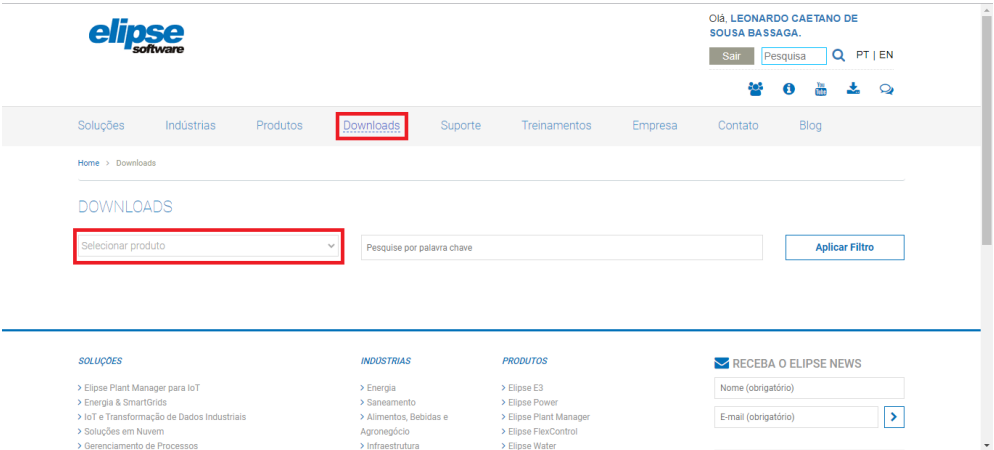
Esta mesma porta selecionada, deve ser também selecionada no Elipse E3 (Figura B.11), para que o Arduino consiga fazer a comunicação com o mesmo.

APÊNDICE B - TUTORIAL DE INSTALAÇÃO DO ELIPSE E3 E CONFIGURAÇÃO PARA EXECUÇÃO DO SUPERVISÓRIO

Para fazer a instalação do Elipse E3 e abrir o projeto desenvolvido, siga estes passos:

- 1º Passo: Acesse o link: <https://www.elipse.com.br>;
- 2º Passo: Acesse sua conta da Elipse Software. Caso não tenha, crie uma conta nova;
- 3º Passo: Após acessar sua conta na plataforma, acesse a aba *download*, e selecione a aba de selecionar produtos e selecione a opção “Elipse E3”;

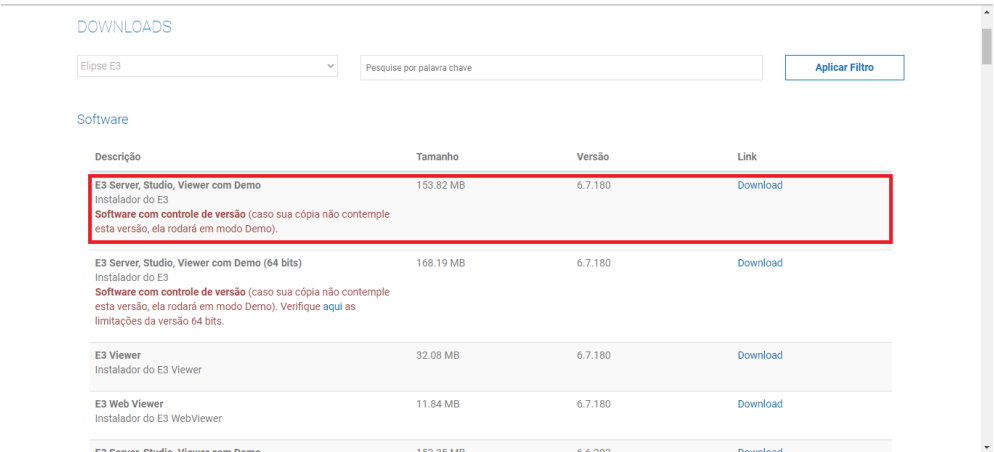
Figura 64. Acessando a aba de Downloads do site da Elipse Software.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

- 4º Passo: Selecione a opção de 32 bits com Studio, Viewer e Demo incluídos;

Figura 65. Demonstração do software correto para download.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5º Passo: Execute o arquivo baixado e prossiga normalmente com as etapas de instalação, aceitando os termos de uso quando solicitado;

6º Passo: Após concluir a instalação, realize o *download* do arquivo .zip disponibilizado no link abaixo: <https://github.com/d-oliveira/TCC-Leonardo-Caetano-Bassaga-2026>

7º Passo: Extraia os arquivos do pacote baixado e salve a pasta “Supervisorio\_Ball\_Balancer\_LCSB” no diretório desejado. Opcionalmente, o projeto pode ser salvo na pasta padrão de projetos do Elipse E3.

Para localizar essa pasta, acesse:

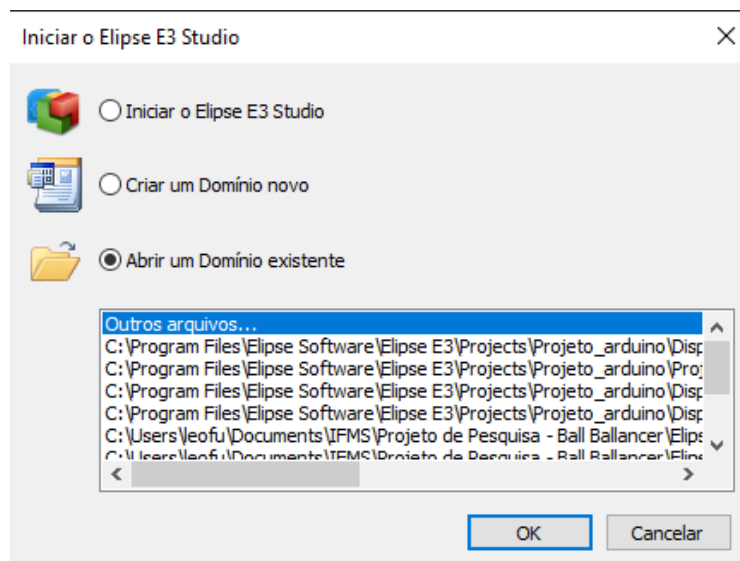
- “Este Computador”
- unidade onde o *software* foi instalado
- “Arquivos de Programas”
- “Elipse Software”
- “Elipse E3”
- “Projects”

Após acessar a pasta “Projects”, mova o arquivo do projeto para esse local;

8º Passo: Abra o *software* “Elipse E3 Studio”. Quando solicitado, permita alterações no dispositivo e selecione a opção “Sim” para executar o *software* em modo demonstração;

9º Passo: Assim que aparecer a tela inicial, assim como apresentado na figura abaixo, selecione a opção “Abrir um Domínio existente”, e selecione o projeto desejado, neste caso o arquivo “Supervisorio\_Ball\_Balancer\_LCSB”;

**Figura 66.** Inicialização do Elipse E3.



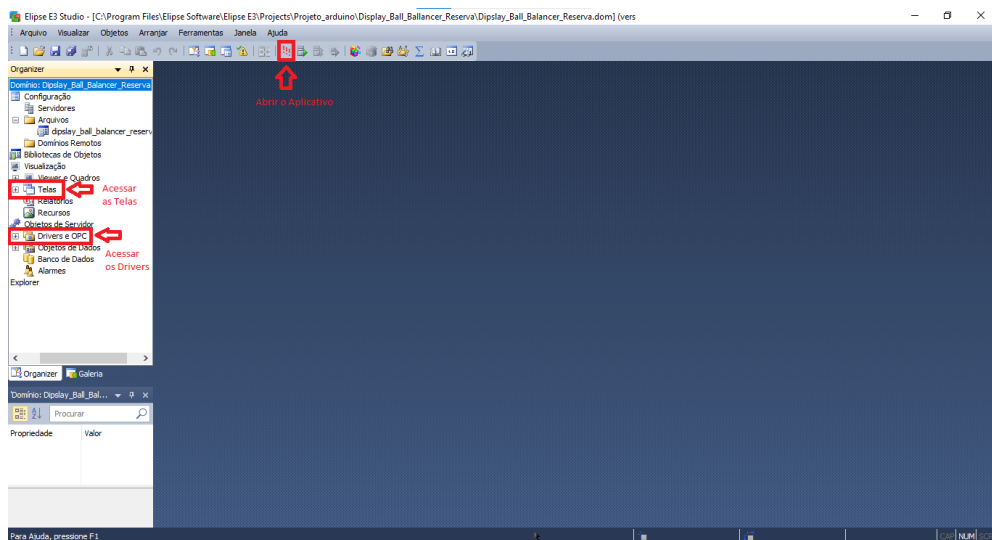
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

Agora depois de aberto o arquivo, para integrá-lo ao *software* irei apresentar alguns comandos básicos de como funciona a interface do Elipse E3 Studio.

A imagem apresentada abaixo é um demonstrativo de como um arquivo será apresentado ao ser aberto. Nesta imagem está demonstrado três ações: “Abrir o Aplicativo”, “Acessar as Telas” e “Acessar os Drivers”.

A ação “Abrir o Aplicativo”, se selecionada, irá compilar o projeto, bastando apenas esta ação para rodar o supervisor, porém antes de compila-lo é preciso carregar o código no sistema *ball balancer*, e também configurar a mesma porta selecionada do Arduino IDE (Figura A.6) aqui no supervisor, essa configuração é feita no 13º Passo deste capítulo (Figura B.11).

**Figura 67.** Integração Inicial ao Elipse E3 Studio.



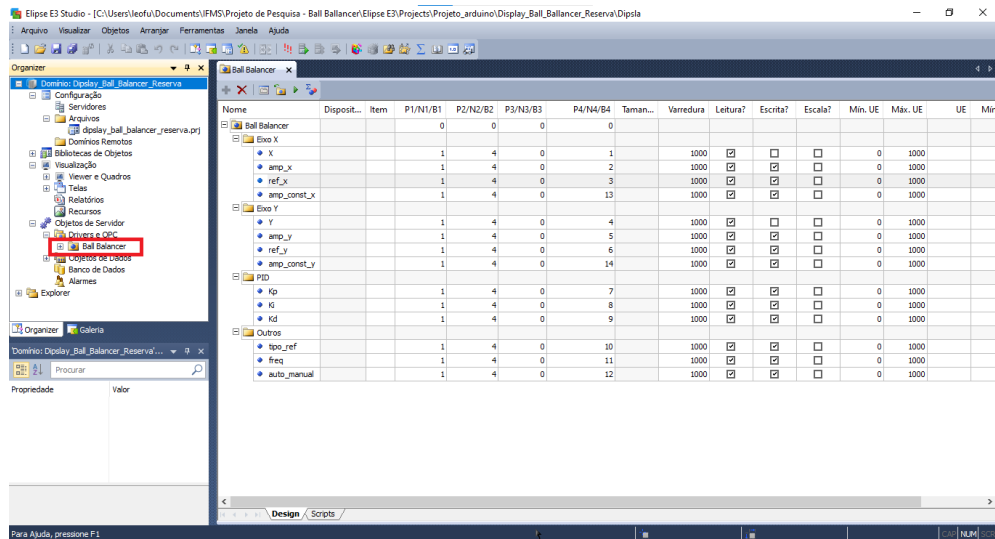
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

As ações apresentadas a seguir são para caso necessite fazer alguma alteração no supervisor, podendo acessar e alterar assim suas configurações do *driver*.

10º Passo: Abra o projeto no Elipse E3;

11º Passo: Localize o *driver* “Ball Balancer”, e selecione-o, assim como mostrado na figura abaixo;

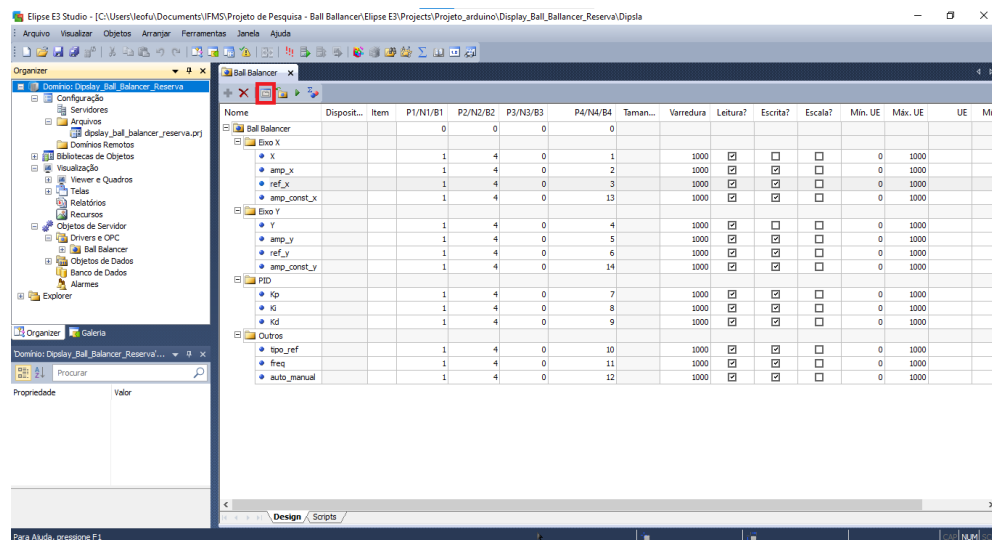
**Figura 68.** Acessando os drivers do Elipse E3.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

12º Passo: Nesta mesma seção do driver, acesse o painel de “Configuração do Driver” assim como mostra a figura B.6. O painel pode também ser acessado clicando com o botão direito no driver “Ball Balancer”, e selecionando a opção “Configuração”;

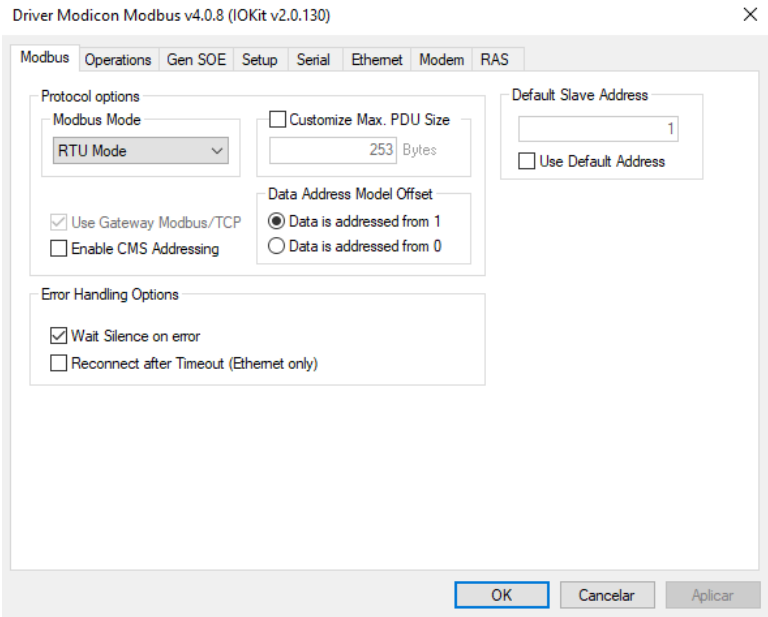
**Figura 696.** Acessando o painel de “Configuração do Driver”.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

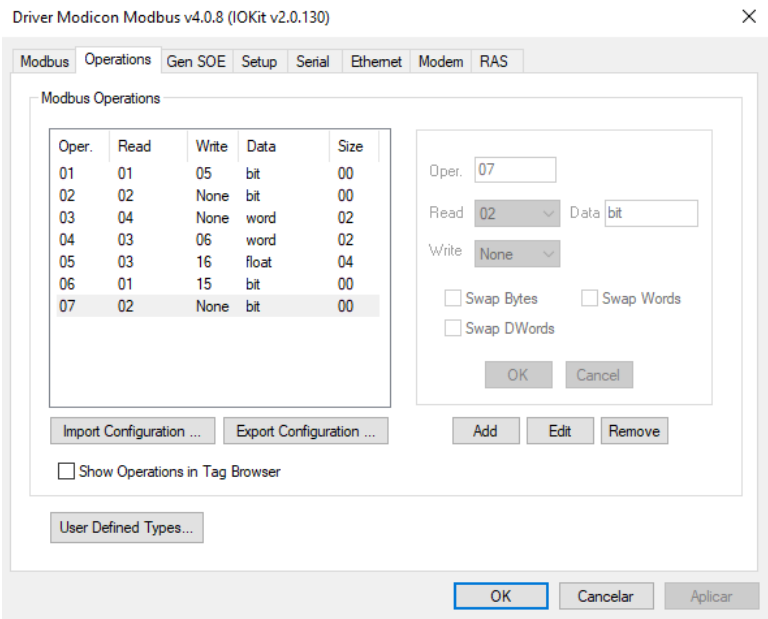
Para certificar que as configurações estejam corretas, serão apresentadas algumas figuras mostrando cada seção do painel de configuração do *driver*, para certificar de que o supervisor opere corretamente. Segue abaixo as figuras que apresentam as configurações que devem estar em cada seção do painel.

Figura 707. Seção “Modbus” do painel de “Configuração do Driver”.



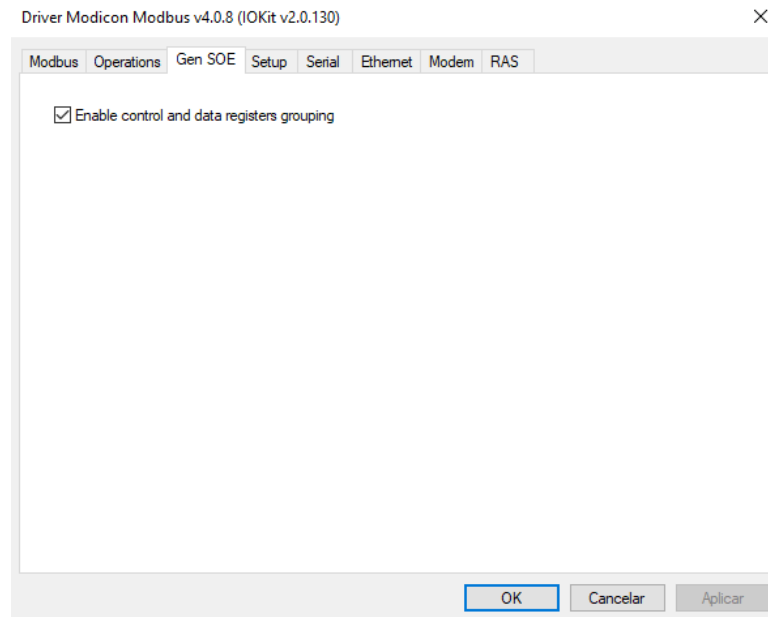
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 718. Seção “Operations” do painel de “Configuração do Driver”.



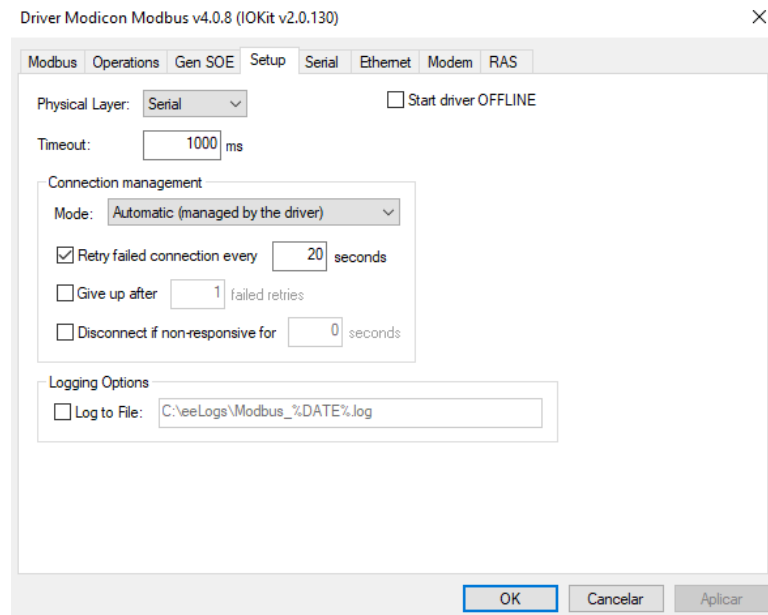
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 729.** Seção “Gen SOE” do painel de “Configuração do Driver”.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

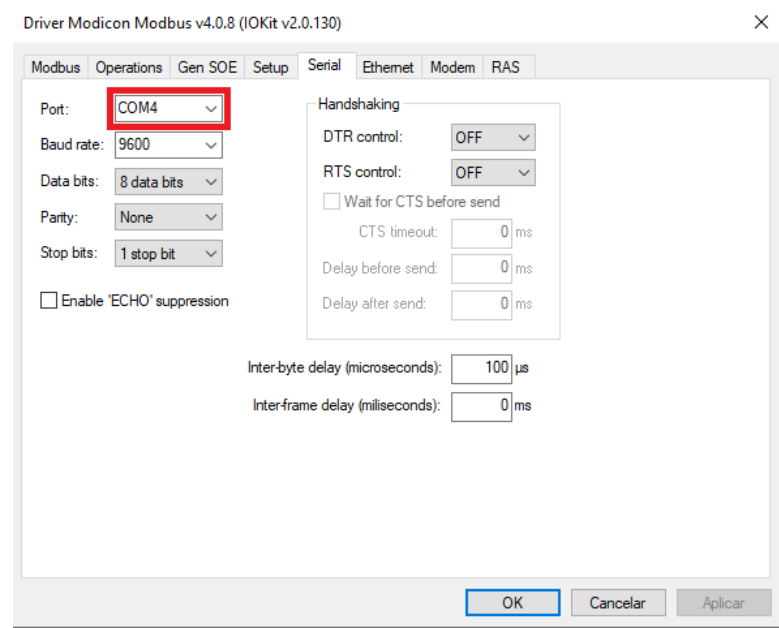
**Figura 7310.** Seção “Setup” do painel de “Configuração do Driver”.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

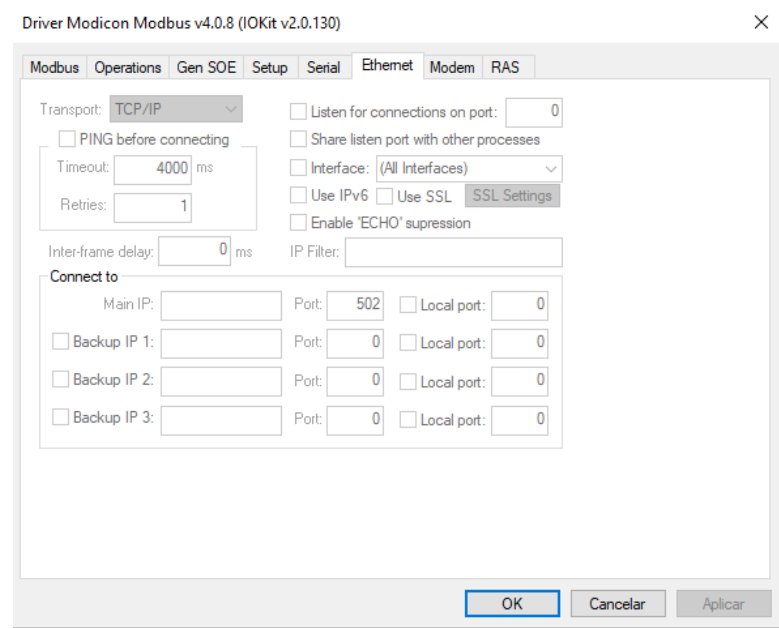
13º Passo: Confira a opção “Port” assim como é apresentado abaixo, assim como já mencionado, essa configuração deve ser a mesma selecionada no Arduino IDE (Figura A.6).

Figura 7411. Seção “Serial” do painel de “Configuração do Driver”.



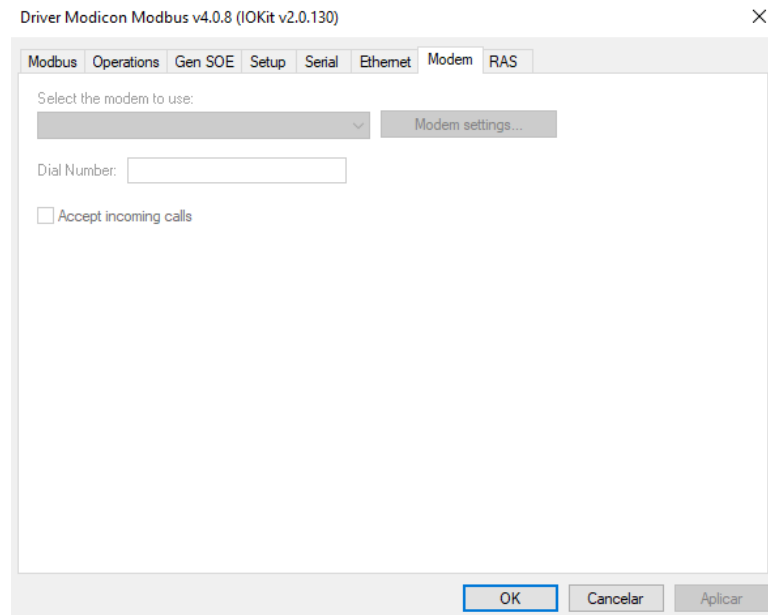
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 7512. Seção “Ethernet” do painel de “Configuração do Driver”.



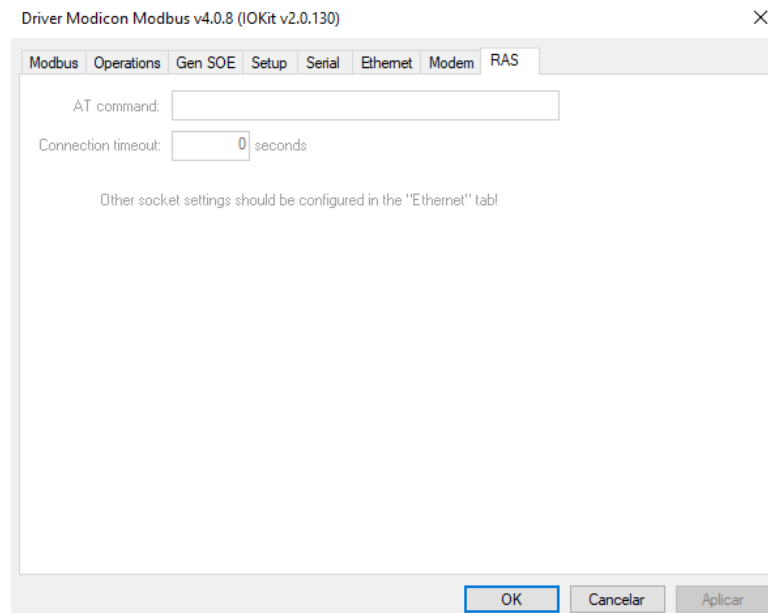
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 76** Seção “Modem” do painel de “Configuração do Driver”.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

**Figura 77** Seção “RAS” do painel de “Configuração do Driver”.



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2024).

Após realizar todas as configurações citadas acima, o sistema está pronto pra funcionamento, bastando apenas o código do Arduino IDE já estar integrado ao Arduino Uno.